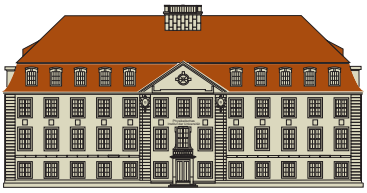
Physikalisches Institut der Universität Bonn

Physikalisches Praktikum für Physiker

Modul physik212

Status Oktober 2013



universitätbonn

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen iii

232 Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände 1

234 Wechselstromwiderstände, Phasenschieber, RC-Glieder und Schwingungen 11

236 Galvanometer zur Strom- und Ladungsmessung 21

238 Transformator 29

240 Hysterese der Magnetisierung von Eisen 45

242 Elektrische und magnetische Krafteinwirkung auf geladene Teilchen 51

A1 Kurzeinführung in die Statistik 63

A2 Schwingungen 75

A3 Oszillograph und Datenaufnahme mit PC 85

A4 Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm 93

Raumplan 103

Vorbemerkungen

Die vorliegenden Texte zu den verschiedenen Versuchen sollen zwei Zielen dienen:

Erstens sollen sie die Praktikanten in die Aufgabenstellungen des jeweiligen Versuchs einweisen und bei der Vorbereitung unterstützen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass durch diese Texte keine ausreichende Behandlung der zum Verständnis der Versuche notwendigen physikalischen Grundlagen gegeben wird. Daher werden jeweils entsprechende Lehrbücher angegeben, deren abschnittsweise Lektüre für die erfolgreiche Bewältigung des Praktikums notwendig ist. Die zitierten Bücher stehen in der Zentralbibliothek zur Verfügung. Bitte beachten Sie, dass vor allem bei älteren Ausgaben der Bücher hin und wieder Abweichungen in Sprache oder Bezeichnungen zu der vorliegenden Praktikumsanleitung vorkommen können.

Zweitens werden die Versuchsanordnungen erläutert, Anweisungen für die Versuchsdurchführungen gegeben, sowie die zu lösenden Aufgaben gestellt. Die Anleitungen sind speziell auf die in Bonn vorhandenen Versuchsaufbauten zugeschnitten und für die Versuchsdurchführung und Auswertung verbindlich. Die Aufgaben sind unterteilt in solche, die **vor Beginn** des Versuchs zu lösen sind (gekennzeichnet durch **große** Buchstaben), und solche, die **im Verlauf** der Versuchsdurchführung zu lösen sind (gekennzeichnet durch **kleine** Buchstaben). Die sorgfältige Bearbeitung der ersteren dient der Vorbereitung und ist eine der Voraussetzungen zum Verständnis des Versuchsablaufs. Sie sind vor Versuchsbeginn schriftlich zu beantworten und der/dem Versuchsassistentin/en zur Kontrolle vorzulegen.

Zu Beginn jedes Praktikumstages werden die Praktikanten im Verlauf eines Einführungsgespräches vor Ort mit den Einzelheiten des Versuchsaufbaus und der Durchführung vertraut gemacht, und der Versuchsablauf wird im Detail durchgesprochen. Sollte sich bei dieser Gelegenheit herausstellen, dass ein(e) Praktikant(in) unzureichend vorbereitet ist, kann er/sie an diesem Tage nicht zur Durchführung des Versuchs zugelassen werden; ihm/ihr wird ein Nachholtermin zugewiesen. Bei zweimaliger Nichtzulassung gilt das Praktikum als nicht bestanden.

In der Regel arbeiten zwei Praktikant(inn)en zusammen an einer Apparatur, wobei jedoch jede(r) ein eigenes Protokoll anfertigt. Daher sind die Messwerte in beiden Protokollen identisch. Bei der Auswertung und der Fehlerdiskussion dürfen jedoch Unterschiede auftreten.

Das **Protokoll** soll parallel zu den Experimenten entstehen (in einem festen DIN A4 Heft) und den Ablauf der Versuche und die Auswertung nachvollziehbar machen. Es ist ordentlich und leserlich abzufassen. Verworfene Messungen werden durchgestrichen und evtl. mit einer Bemerkung versehen, aus welcher der Grund der Streichung hervorgeht.

Folgende Punkte muss das Protokoll enthalten:

1. Datum der Versuchsdurchführung;
2. Thema und Aufgabenstellung mit einer kurzen Zusammenstellung der verwendeten Größen, Formeln und Beziehungen;
3. Antworten zu den Aufgaben, die vor Versuchsbeginn zu lösen sind;

4. Versuchsskizze mit Angaben über Geräte (z.B. Gerätenummer);
5. Alle beobachteten Messwerte. Diese sind nur sinnvoll, wenn sie die verwendete physikalische Dimension enthalten (z.B. 5,4 **V** oder 17 **Skt**);
6. Auftragung der direkten oder abgeleiteten Messwerte auf Millimeterpapier;
7. Auswertung mit Nebenrechnungen. Bei den Rechnungen sind nur so viele Dezimalstellen zu verwenden, dass Rundungsfehler keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis haben;
8. Ergebnisse mit Fehlerangabe. Wo sich ein Vergleich mit Literaturwerten anbietet, sollten die Übereinstimmungen kurz diskutiert werden.
9. Antworten zu den Aufgaben während und nach der Versuchsdurchführung.

Das Protokoll ist am Versuchstag fertigzustellen und der/dem Versuchsassistenten/in zu übergeben. Falls dies aus Zeitmangel einmal nicht möglich sein sollte, kann mit der/dem Assistentin/en ein anderer Abgabetermin vereinbart werden. Das Protokoll muss jedoch spätestens vor Beginn des nächsten Versuchs vorliegen.

Zu den Versuchstagen soll stets ein Taschenrechner (mit Winkelfunktionen, Logarithmen, Potenzen mit gebrochenen Exponenten) und Millimeterpapier mitgebracht werden.

Zur Auswertung (aber nicht zur Protokollierung) der Messdaten können auch Notebooks mit selbst geschriebenen Programmen benutzt werden. Die Resultate, einschließlich Graphen, sind auszudrucken und in das Protokollheft einzukleben.

Die Praktikumsassistent(inn)en stehen während der gesamten Praktikumszeit zur Verfügung, verlassen jedoch nach der Einführung in der Regel den Praktikumsraum. Sie hinterlassen dann eine Telefonnummer, unter der sie bei auftretenden Schwierigkeiten herbeigerufen werden können.

Das Praktikum wird durch eine Prüfung abgeschlossen, welche vor Ende des laufenden Semesters abgelegt werden muss.

Allgemeine Literaturempfehlungen

Praktikumslehrbücher:

- Walcher, Praktikum der Physik; Teubner
- Geschke, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Teubner
- Westphal, Physikalisches Praktikum; Vieweg
- Kohlrausch, Praktische Physik zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik

Messdatenauswertung:

- Blobel/Lohrmann, Statistische und Numerische Methoden der Datenanalyse
- Gränicher, Messung beendet - was nun?, ETH-Zürich/Teubner
- Brandt, Datenanalyse

Formelsammlungen:

- Kneubühl, Repetitorium der Physik;
- Otten, Repetitorium der Experimentalphysik
- Kuchling, Taschenbuch der Physik

Es wird nachdrücklich empfohlen, die Anhänge der Praktikumsanleitung vor Beginn des Praktikums durchzuarbeiten.

Versuch 232

Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände

Lernziel: Der Versuch behandelt die Themen „Spannungsquelle“ und „Widerstand“ und verwendet Kompensations- und Brückenschaltungen.

Er soll mit charakteristischen Eigenschaften von Spannungsquellen wie Leerlaufspannung, Innenwiderstand und Klemmenspannung vertraut machen. Als wichtiges Beispiel für die Modifizierung einer vorhandenen Spannungsquelle zur Erfüllung äußerer Anforderungen wird die Spannungsteilerschaltung vorgestellt. Das Verhalten eines Spannungsteilers unter Belastung wird gemessen, und Kriterien für die Auslegung einer solchen Schaltung werden erarbeitet. Eine Spannungsquelle mit variabler Klemmenspannung wird zur Messung der Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe einer Kompensationsschaltung genutzt.

Die Messung ohmscher Widerstände, sowohl absolut mit Strom- und Spannungsmessgeräten und den erforderlichen Korrekturen als auch relativ mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung, soll geübt werden. Zudem sollen charakteristische Leitertypen durch Messung der Temperaturabhängigkeit ihres elektrischen Widerstandes unterschieden und verstanden werden.

Kenntnisse: Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, spezifische Leitfähigkeit von Leitern, Halbleitern und Isolatoren, Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes, Leitungsmechanismen

Ideale und reale Spannungsquelle, Innenwiderstand von Spannungsquellen, Leerlauf- und Klemmenspannung, Aufbau und Wirkungsweise eines Normalelementes und einer Batterie, Spannungsteiler, Lastanpassung

Ampère- und Voltmeter, Innenwiderstand dieser Messgeräte, Veränderung des Messbereichs durch Parallel- bzw. Serien-/Vorwiderstand und deren Einfluss auf die Messung;

Potentiometerschaltung, Wheatstonesche Brückenschaltung, Kompensationsschaltung

Geräte:

- Helipot
- Mavometer
- Drehspulmessgerät
- Nullinstrument
- Digitalmultimeter
- Thermostat mit Heizung

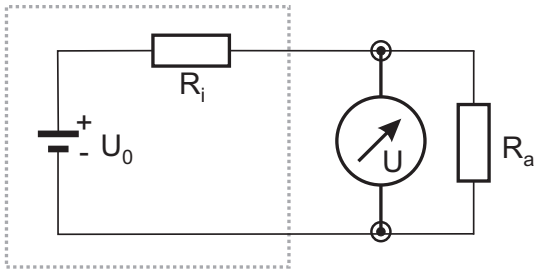


Abbildung 232.1:
Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle

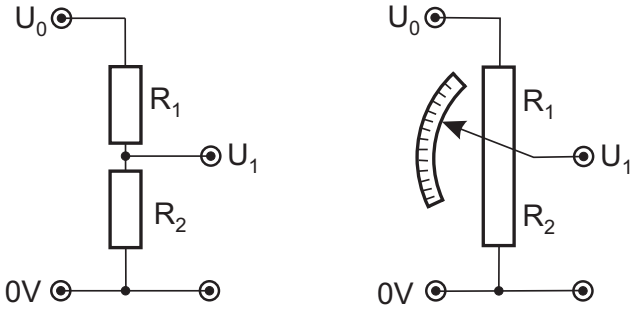


Abbildung 232.2:
Spannungsteiler- bzw. Potentiometerschaltung

232.1 Erläuterungen

232.1.1 Spannungs- und Stromquellen

Eine **ideale Spannungsquelle** liefert eine vom entnommenen Strom unabhängige Spannung U_0. Eine **reale Spannungsquelle** liefert eine stromabhängige Spannung. In einem Ersatzschaltbild wird sie dargestellt als ideale Spannungsquelle mit dahinter geschaltetem **Innenwiderstand** R_i (Abb. 232.1). Die **Klemmenspannung** U beträgt

$$U = U_0 - R_i I = U_0 \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i} = U_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}. \tag{232.1}$$

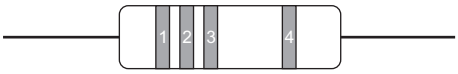
Sie ist lastabhängig. Mit abnehmender Belastung, d.h. $R_a \to \infty$, gilt $U \to U_0$. Daher heißt U_0 **Leerlaufspannung**. Für eine gegebene Spannungsquelle sind U_0 und R_i i.a. Konstanten. R_i ist differentiell definiert: $R_i := \frac{\partial U}{\partial I}$.

232.1.2 Widerstände

Kommerzielle Widerstände gibt es in verschiedenen Ausführungen. Sie unterscheiden sich hauptsächlich in ihrer maximal erlaubten Belastung. Gebräuchlich sind (1/8, 1/4, 1/2 und 1) W-Widerstände. Man erkennt ihren Widerstandswert an einem Farbcode. Er besteht meist aus 4 Ringen, wobei die ersten 2 den Widerstandswert angeben, der 3. den Multiplikator und der 4. die Toleranz (Abb. 232.3). Widerstände hoher Genauigkeit haben 5 oder 6 Ringe. Hier geben die ersten drei den Widerstandswert an, Ring 4 den Multiplikator und Ring 5 die Toleranz. Ein eventueller 6. Ring gibt den Temperaturkoeffizienten an. Ein Widerstand mit der Farbcodierung gelb-violett-schwarz hat also einen Wert von 47 Ω.

232.1.3 Spannungsteiler- und Potentiometerschaltung

Häufig möchte man sich mit einer vorhandenen Spannungsquelle U_0 eine geeignete Klemmenspannung U_1 herstellen. Dies kann man entweder durch eine Spannungsteilerschaltung (R_1 und R_2 fest) oder durch eine Potentiometerschaltung, bei der sich der Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$



Farbe	1.Ring 1. Ziffer	2.Ring 2. Ziffer	3.Ring Multiplikator	4. Ring Toleranz
silber			10^{-2}	10%
gold			10^{-1}	5%
schwarz		0	10^{0}	
braun	1	1	10^{1}	1%
rot	2	2	10^{2}	2%
orange	3	3	10^{3}	
gelb	4	4	10^{4}	
grün	5	5	10^{5}	0.5%
blau	6	6	10^{6}	0.25%
violett	7	7	10^{7}	0.1%
grau	8	8	10^{8}	
weiß	9	9	10^{9}	

Abbildung 232.3: Farbcodierung von Widerständen mit vier Ringen

kontinuierlich teilen lässt (Abb. 232.2) realisieren. Einstellbare Spannungsteiler sind häufig so ausgebildet, dass man statt der Widerstandswerte R_1 (oder R_2) dazu proportionale Größen wie z.B. eine Länge x (beim Schiebewiderstand) oder Skalenteile (beim Helipot = helixförmig gewickeltes Langdrahtpotentiometer) abliest.

232.1.4 Kompensationsschaltung

Mit der hier eingesetzten Kompensationsschaltung nach Poggendorff kann stromlos gemessen und daher die Leerlaufspannung einer unbekannten Spannungsquelle ermittelt werden, ohne diese zu belasten. Die Stromlosigkeit wird mit einem Nullinstrument (Galvanometer mit Nullpunkt in Skalenmitte) festgestellt. Zum Nullabgleich genügt es nicht, wenn der Zeiger auf null zeigt; vielmehr darf der Zeiger beim Betätigen des Tasters nicht mehr zucken.

232.1.5 Messbereichserweiterung

Drehspulmessinstrumente können je nach Verschaltung Ströme oder Spannungen messen. Die Kenndaten eines Geräts geben seinen Innenwiderstand an und somit (1) den Maximalstrom, der durch die kleine Drehspule fließen darf, und (2) die Maximalspannung, die an der Spule anliegen darf. Diese Kenndaten bestimmen auch die empfindlichsten Messbereiche des Instruments. Diese Messbereiche können durch Beschaltung mit Widerständen vergrößert werden.

Sollen größere Ströme gemessen werden, muss ein entsprechend großer Anteil des Stromes über einen Parallelwiderstand am Messwerk vorbei geleitet werden. Sollen größere Spannungen gemessen werden, muss ein entsprechend großer Spannungsanteil vor dem Messwerk über einem Serien- oder Vorwiderstand abfallen. Drehspulmessinstrumente mit Messbereichsumschalter haben entsprechende Widerstände eingebaut.

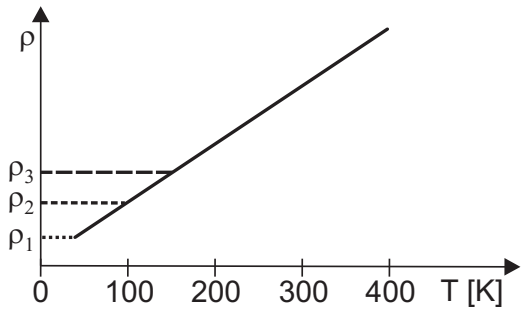


Abbildung 232.4: Metallische Leitung: Spezifischer Widerstand ρ als Funktion der Temperatur T, exemplarisch für drei Materialien mit unterschiedlichen Restwiderständen ρ_i.

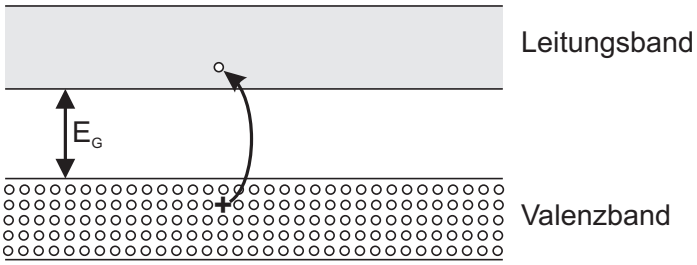


Abbildung 232.5: Bändermodell eines Halbleiters

232.1.6 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes R ist für verschiedene Materialien charakteristisch und soll exemplarisch für

1. einen reinen metallischen Leiter (Platin)
2. einen reinen Halbleiter („Heißleiter“, oder NTC[1]-Widerstand)
3. eine metallische Legierung (Manganin-Widerstand)

untersucht werden. Ihr grundlegendes Verhalten soll diskutiert und verstanden werden anhand der fundamentalen Beziehung

$$\text{spezifische Leitfähigkeit:} \quad \sigma = e \cdot (n^- z^- \mu^- + n^+ z^+ \mu^+), \tag{232.2}$$

mit: $n^\pm$ = positive bzw. negative Ladungsträgeranzahl,
$z^\pm$ = Wertigkeiten der pos. bzw. neg. Ladungsträger,
$\mu^\pm$ = Beweglichkeiten der pos. bzw. neg. Ladungsträger.

Im **metallischen Leiter** tragen ausschließlich die Elektronen zur Stromleitung bei. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck für die spezifische Leitfähigkeit (Gleichung 232.2) in Metallen zu $\sigma = e \cdot n^- \mu^-$. Die Zahl der beteiligten Elektronen im Metall ist durch die Zahl der Atome bestimmt: Jedes Atom stellt im Mittel ein Leitungselektron zur Verfügung, unabhängig von der Temperatur. Die Beweglichkeit der Elektronen wird durch ihre Streuung an den „Phononen“ auf dem Weg durch den Kristall bestimmt. Phononen sind als Teilchen aufgefasste Gitterschwingungen, deren Anzahl von der Temperatur bestimmt wird: je höher die Temperatur, desto mehr Phononen, desto mehr Streuung und desto geringere Beweglichkeit. Eine komplizierte Rechnung zeigt: $\mu \propto 1/T$. Daraus folgt unmittelbar für spezifische Leitfähigkeit σ in Metallen:

$$\sigma = e \cdot n^- \mu^-(T) \propto 1/T \qquad \text{bzw.} \qquad 1/\sigma = \rho \propto R \propto T. \tag{232.3}$$

[1] NTC: Negative Temperature Coefficient

Eine genaue Messung des Widerstandsverlaufs bei tiefen Temperaturen ergibt (siehe Abb. 232.4), dass mit sinkender Temperatur der spezifische Widerstand ρ einen temperaturunabhängigen Wert annimmt, der vom Reinheitsgrad des Metalls abhängt. Je mehr Störstellen das material aufweist, desto größer ist der spezifische Restwiderstand ρ_i. Man kann sich das Verhalten bestimmter metallischer Legierungen auch so vorstellen: Die Zahl der Störstellen ist so groß, dass sich der Bereich des Restwiderstandes über viele 100 K erstreckt.

In **reinen Halbleitern** (Ge, Si, Cu_2O, GaAs, usw.) wird die elektrische Leitfähigkeit mit Hilfe des Bändermodells (siehe Abb. 232.5) wie folgt beschrieben: Bei sehr tiefen Temperaturen sind alle Zustände im Valenzband (VB) gefüllt, das Leitungsband (LB) ist völlig leer; zwischen beiden Bändern gibt es ein verbotenes Gebiet, in dem es bei reinen Halbleitern keine möglichen Zustände gibt. Die Breite dieses verbotenen Gebietes wird mit „Gap"-Energie E_G bezeichnet. Bei sehr tiefen Temperaturen ($T \approx 0\,K$) ist ein reiner Halbleiter ein perfekter Isolator. Wird die Temperatur erhöht, werden einzelne Elektronen in das LB angeregt, wobei sie Löcher im VB hinterlassen; diese Löcher entsprechen positiven Ladungen. Beide Ladungsträgerarten zusammen sorgen für die sogenannte **Eigenleitung**. Die Anzahldichten der negativen und positiven Ladungen n^- und n^+ sind gleich groß und gleich n. Die quantenmechanische Berechnung von n ergibt:

$$n(T) \propto T^{+\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_G}{2kT}}. \tag{232.4}$$

Die Beweglichkeiten μ^- und μ^+ sind im Allgemeinen einander ähnlich und von der Temperatur abhängig. Die Beweglichkeit wird wie im Fall der metallischen Leitung durch Phononenstreuung bestimmt, und die Berechnung ergibt für den Fall des Halbleiters:

$$\mu(T) \propto T^{-\frac{3}{2}} \quad . \tag{232.5}$$

Damit kann die spezifische Leitfähigkeit σ wie folgt berechnet werden:

$$\sigma = 2e \cdot n(T) \cdot \mu(T) \propto T^{+\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_G}{2kT}} \cdot T^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{E_G}{2kT}}. \tag{232.6}$$

Dies gilt für reine Halbleiter ohne Dotierung, also reine Eigenleitung (intrinsic conduction). Der elektrische Widerstand nimmt mit steigender Temperatur ab, daher der Name „Heißleiter" bzw. „negative temperature coefficient"-Widerstand oder kurz NTC-Widerstand. Zur Auswertung des Experimentes wird der Widerstand R wegen $R \propto \rho = 1/\sigma$ angesetzt zu:

$$R = R_0 \cdot e^{\frac{E_G}{2kT}} \quad . \tag{232.7}$$

Die Gap-Energien E_G betragen beispielsweise für:

Material:	InSb	Ge	Si	GaAs	Cu_2O	Diamant
E_G [eV]:	0.18	0.7	1.1	1.42	2.1	6

232.2 Vor Versuchsbeginn zu erledigende Aufgaben

Aufgabe 232.A: *Definieren Sie eine ideale Stromquelle. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für eine reale Stromquelle.*

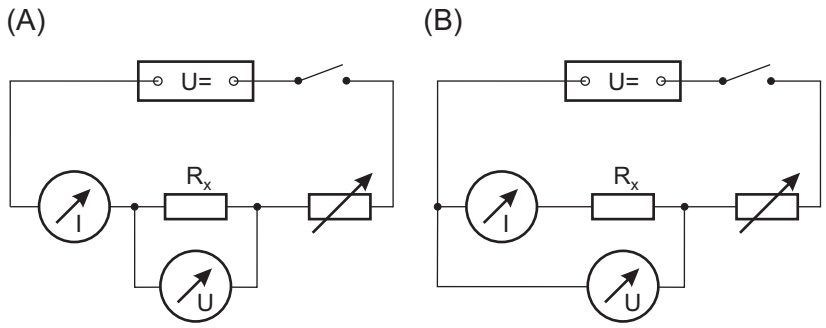


Abbildung 232.6: Schaltungen zur Bestimmung von Widerständen mit einer Strom- und Spannungsmessung.

Aufgabe 232.B: *Geben Sie eine Messvorschrift an zur Bestimmung der Leerlaufspannung U_0 und des Innenwiderstand R_i einer realen Spannungsquelle.*

Aufgabe 232.C: *Betrachten Sie die Wheatstonesche Brücke (Abb. 232.10).*
Leiten Sie die Beziehung $R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_0$ für die abgeglichene Schaltung ($I = 0$) ab.

Aufgabe 232.D: *Sie wollen mit einem Ampèremeter mit Vollausschlag 1 mA und Innenwiderstand $R_i = 1\,\Omega$ einen Strom von 4 A messen.*
Schlagen Sie eine geeignete Schaltung dafür vor.

Aufgabe 232.E: *Sie wollen mit einem Voltmeter mit Vollausschlag 1 V und Innenwiderstand $R_i = 100\,\mathrm{k}\Omega$ einen Strom von 10 μA messen.*
Was müssen Sie tun?

Aufgabe 232.F: *Können Sie mit einem Ampèremeter Spannungen messen?*
Welche Bedingungen müssen erfüllt sein?

Aufgabe 232.G: *Geben Sie die Formeln für die Gesamtwiderstände R_A bzw. R_B aus R_x, und den Innenwiderständen von Strom- und Spannungsmesser in den Schaltungen A bzw. B von Abb. 232.6 an.*

232.3 Versuchdurchführung

232.3.1 Widerstandsbestimmung durch Strom- und Spannungsmessung

Aufgabe 232.a: *Messen und zeichnen Sie die U-I-Abhängigkeit in einer der beiden Schaltungen aus Abb. 232.6. Benutzen Sie hierbei zwei Mavometer, deren Messbereiche Sie mit Parallel- bzw. Vorwiderständen geeignet einstellen (Abb. 232.7). Bestimmen sie aus der U-I-Kurve zu Schaltung A bzw. B deren Ersatzwiderstand R_A bzw. R_B (= Gesamtwiderstand aus R_x, Strom- und Spannungsmesser).*

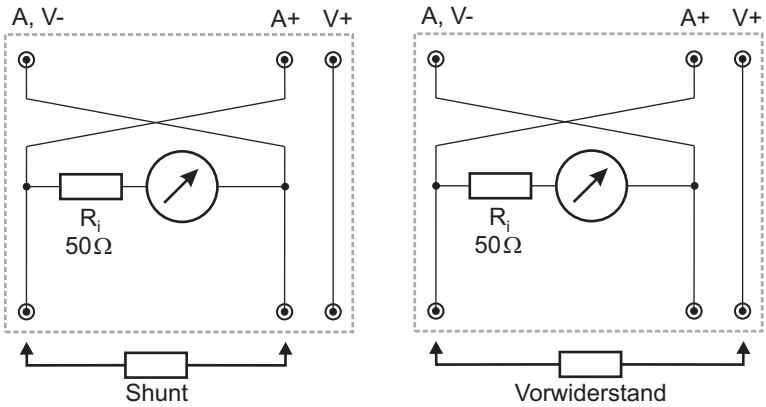


Abbildung 232.7: Aufbau der Messinstrumente: Widerstand des Messwerkes $R_i = 50\,\Omega$; Bei Vollausschlag: $I = 2\,\text{mA}$ bzw. $U = 0{,}1\,\text{V}$. (Mavometer = Milliampere–Volt–Meter).

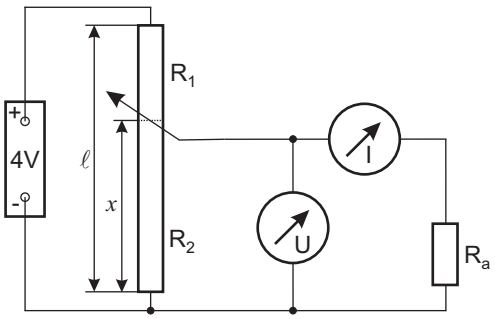


Abbildung 232.8: Belastete Potentiometerschaltung

Aufgabe 232.b: *Berechnen Sie den wahren Wert R_x unter Berücksichtigung der Innenwiderstände der Messinstrumente. Tragen Sie dann zusätzlich die Gerade $U = R_x \cdot I$ in das Diagramm ein.*

Aufgabe 232.c: *Überprüfen Sie den Wert des Widerstandes R_x mit einem Digitalmultimeter.*

232.3.2 Belastete Potentiometerschaltung

Die vorhandene Spannungsquelle ($(2 - 4)\,\text{V}$) ist stabilisiert, und daher ist $R_i \approx 0\,\Omega$. Bauen Sie damit und aus $R_1 = 20\,\Omega, R_2 = 50\,\Omega$ eine Spannungsteilerschaltung auf (Abb. 232.8). Als Last verwenden Sie die Widerstandskaskade ($R_a = (0 - 130)\,\Omega$). Der Spannungsmesser hat einen relativ hohen Widerstand und stellt somit eine kleine Last dar.

Aufgabe 232.d: *Messen Sie für verschiedene Lastwiderstände R_a (maximal 10 verschiedene R_a) den Strom I durch den Lastwiderstand und die Spannung U über dem Lastwiderstand und dem Ampèremeter. Verwenden Sie das Mavometer zur Strommessung und zur Spannungsmessung. Der Innenwiderstand des Mavometers ist bekannt und soll berücksichtigt werden.*

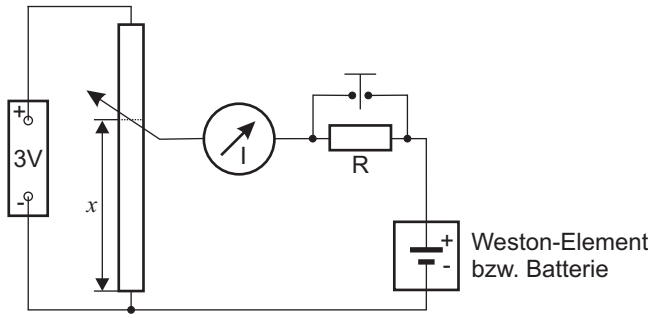


Abbildung 232.9: Kompensationsschaltung nach Poggendorff

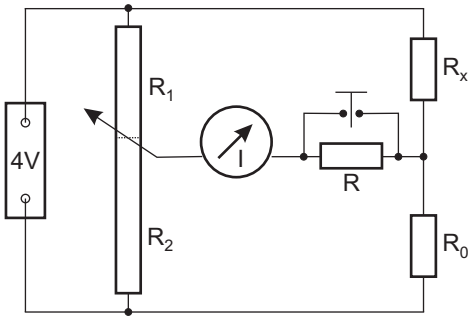


Abbildung 232.10: Wheatstonesche Brücke

Aufgabe 232.e: *Betrachten Sie die Spannungsteilerschaltung (Spannungsquelle + Spannungsteiler) als neue Spannungsquelle und das entsprechende Ersatzschaltbild (Abb. 232.1). Bestimmen Sie aus den gemessenen Werten die Größen Innenwiderstand R_i^S und Leerlaufspannung U_0^S. Zeichnen Sie hierzu ein U-I-Diagramm und verifizieren Sie die Relation:*

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = U_0^s - R_i^s \cdot I \tag{232.8}$$

Was könnten Sie tun, um unter Beibehaltung des Wertes von U_0^S den Innenwiderstand R_i^S zu verkleinern?
Warum kann man das nicht beliebig weit treiben?

Aufgabe 232.f: *Setzen Sie nun anstelle des Spannungsteilers das Potentiometer (Helipot) ein (Abb. 232.8, es werden jeweils nur die Messinstrumente in die Schaltung eingebaut, die benötigt werden.) Bestätigen Sie ohne Last die lineare Relation*

$$U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 = \frac{x}{\ell} \cdot U_0 \quad . \tag{232.9}$$

Beim Helipot werden die Größen x und ℓ in Skalenteilen abgelesen und angegeben. Wiederholen Sie die Messung für die Lastwiderstände $R_a = 20\,\Omega$ und $R_a = 50\,\Omega$. Zeichnen Sie alles zusammen in ein Diagramm ein und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 232.g: *Berechnen Sie jeweils die im Lastwiderstand verbrauchte Leistung P und tragen Sie $P = P(x)$ auf. Für welches x ist die Leistung maximal? Was gilt dann für die Widerstände R_1 und R_2?*

232.3.3 Messung der Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe einer Kompensationsschaltung (nach Poggendorff)

Ein Weston-Element dient als Spannungsnormal. Seine Spannung beträgt $U = (1{,}0190 \pm 0{,}0005)$ V in unbelastetem Zustand, $I \leq 10^{-5}$ A. Das Nullinstrument ist ein Galvanometer mit Nullpunkt in der Skalenmitte.

Abbildung 232.11: Verschaltung der Leiter im Reagenzglas des Thermostaten

Aufgabe 232.h: *Kalibrierung einer Hilfsspannungsquelle (stabilisiertes Netzgerät) durch das Weston Element (Abb. 232.9). Als Potentiometer wird ein Schleifdrahtpotentiometer verwendet.*

Zum Schutz des Normalelements und des Nullinstruments muss zu Beginn ein relativ hoher Widerstand vorgeschaltet werden. Nach erfolgtem groben Abgleich wird dieser zur Erhöhung der Empfindlichkeit mit dem Taster überbrückt. Widerstand und Taster sind in ***einem*** *Kästchen eingebaut.*

Aufgabe 232.i: *Messen Sie die Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe der kalibrierten Anordnung (Abb. 232.9).*

Wie variiert der Messfehler mit dem x-Wert?
Wäre es gut, ein Spannungselement von 10 V zu verwenden?

Aufgabe 232.j: *Messung der Leerlaufspannung derselben Batterie mit Mavometer und mit Digitalmessgerät. Erklären Sie, warum das Mavometer die Batteriespannung nicht richtig misst.*

232.3.4 Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke

Bauen Sie die Wheatstonesche Brücke gemäß Abb. 232.10 auf. Als Nullinstrument dient wieder das Pultgalvanometer im grünen Gehäuse mit der Ruhestellung des Zeigers in der Mitte der Skala. Seine Daten sind: Spannung bei Vollausschlag: 4 mV, Innenwiderstand: 100 Ω. **Es darf höchstens zehnfach überlastet werden.**

Aufgabe 232.k: *Bestimmen Sie hiermit einen unbekannten Widerstand R_x. Als Potentiometer wird ein „Helipot“ (Präzisions-Potentiometer mit 1000 Skalenteilen) benutzt.*

Aufgabe 232.l: *Welchen Wert sollte der Widerstand R ungefähr haben, wenn er – bei nicht gedrücktem Taster T – einerseits das Nullinstrument U ausreichend vor Überlastung schützen, andererseits die Empfindlichkeit nicht übermäßig reduzieren soll?*

232.3.5 Messung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

In einem Thermostaten mit einstellbarer elektrischer Heizung befindet sich Wasser. In diesem Wasserbad befindet sich eine Art Reagenzglas, das mit Öl gefüllt ist. Letzteres enthält ein Quecksilberthermometer einen Platindraht, einen Manganindraht und einen Heißleiter.

Es soll der Widerstand $R(T)$ für die 3 Leitertypen im Bereich von Raumtemperatur bis knapp 100 °C gemessen und in geeigneter Weise grafisch dargestellt werden. Die Widerstände sind mit einem Digitalmultimeter zu messen. Der Widerstand der metallischen Leiters soll durch

$$R(T) = R_0(1 + \alpha\vartheta), \tag{232.10}$$

R_0 = Widerstand bei 0 °C,
ϑ = Temperatur in Celsius,
α = Temperaturkoeffizient,

der Widerstand des Halbleiters durch

$$R(T) = R_0 \mathrm{e}^{\frac{E_\mathrm{G}}{2kT}}, \tag{232.11}$$

R_0 = Konstante ohne besondere physikalische Bedeutung,
E_G = charakteristische Gap-Energie, die von der Art des Halbleiters abhängig ist,
T = Temperatur in Kelvin,

dargestellt werden.

Die Versuche werden grafisch, auf zwei verschiedene Arten ausgewertet, so dass durch eine geschickte Wahl der Darstellung die gesuchten Parameter α und E_G gewonnen werden können. Aus der Gap-Energie des Halbleiters soll die Art des Halbleiters bestimmt werden.

Aufgabe 232.m: *Heizen Sie mit dem Thermostaten die Temperatur im Reagenzglas* **langsam** *von Raumtemperatur auf knapp 100 °C auf und messen Sie dabei immer abwechselnd die Widerstände der drei Leiter: Bei jeder Widerstandsmessung lesen Sie auch das Quecksilberthermometer ab und tragen die Werte in eine Tabelle ein.*

Aufgabe 232.n: *Berechnen Sie aus diesen Daten $R(T)$ und tragen Sie auf:*

- ***Für die metallischen Leiter:***
  R als Funktion von ϑ (Celsius-Temperatur) auf Millimeter-Papier. Berechnen Sie α einschließlich einer Fehlerabschätzung und diskutieren Sie das Verhalten von R bei bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt der Temperatur.
- ***Für den Halbleiter:***
  Den natürlichen Logarithmus des Widerstands $\ln(R/\Omega)$ als Funktion von $1/T$ (T = absolute Temperatur) auf Millimeter-Papier, oder einfacher: R als Funktion von $1/T$ auf halblogarithmischem Papier. Bestimmen Sie die Gap-Energie E_G in eV einschließlich einer Fehlerabschätzung.

Versuch 234

Wechselstromwiderstände, Phasenschieber, RC-Glieder und Schwingungen

Lernziel: Kapazitäten und Induktivitäten sollen mit einer Wechselstrombrücke gemessen werden. Eine Phasenschieberschaltung soll aufgebaut werden. Die komplexe Schreibweise und Darstellung von Wechselstromgrößen soll verstanden und geübt werden.

In der Elektronik tritt oft die Aufgabe auf, aus einer Signalspannung, die aus einem Gemisch von Frequenzen besteht, entweder

- alle Frequenzanteile oberhalb („**Tiefpass**“), oder
- alle Frequenzanteile unterhalb („**Hochpass**“), oder
- alle Frequenzanteile in unmittelbarer Umgebung („**Sperrfilter**“)

einer vorgegebenen Frequenz ω_{grenz} weitgehend zu unterdrücken. Dies geschieht mit den in Klammern angegebenen Schaltungstypen, die im wesentlichen aus frequenzabhängigen Widerständen bestehen. Wirkungsweise und Berechnung solcher Schaltungen sollen gelernt werden.

Es ist ein wesentliches Merkmal der Physik, dass mathematisch-physikalische Formalismen von einem Gebiet der Physik auf ein anderes übertragen werden können. Dies soll am Beispiel der „Resonanz“ nachvollzogen werden: alle bei der erzwungenen Schwingung am Drehpendel beobachteten Größen wie Eigenfrequenz, Frequenz der Maximalamplitude, Q-Wert, Resonanzüberhöhung, Resonanzbreite werden auf den elektrischen Schwingkreis übertragen und experimentell bestätigt.

Kenntnisse: Grundbegriffe des Wechselstromes, komplexe Schreibweise, Darstellung von Strom und Spannung als Vektoren in der komplexen Ebene (Vektor- oder „Zeiger“-Diagramm); Wechselstrombrücke, Begriff des Gegeninduktionskoeffizienten von 2 Spulen; Strom-, Spannungs- und Impedanzübersetzung eines Transformators; Hochpass, Tiefpass, Saugfilter, Sperrfilter, Inhalt von Anhang A4; Dämpfungsmaß Dezibel = dB, Kreisgüte Q, Unterdrückungsgüte Q'; elektrischer Schwingkreis, Energiefluss im Schwingkreis; Inhalt von Anhang A2; Oszillograph (siehe Anhang A3).

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik,
z.B. Berkeley Physik-Kurs, Band II, Kap. 8;

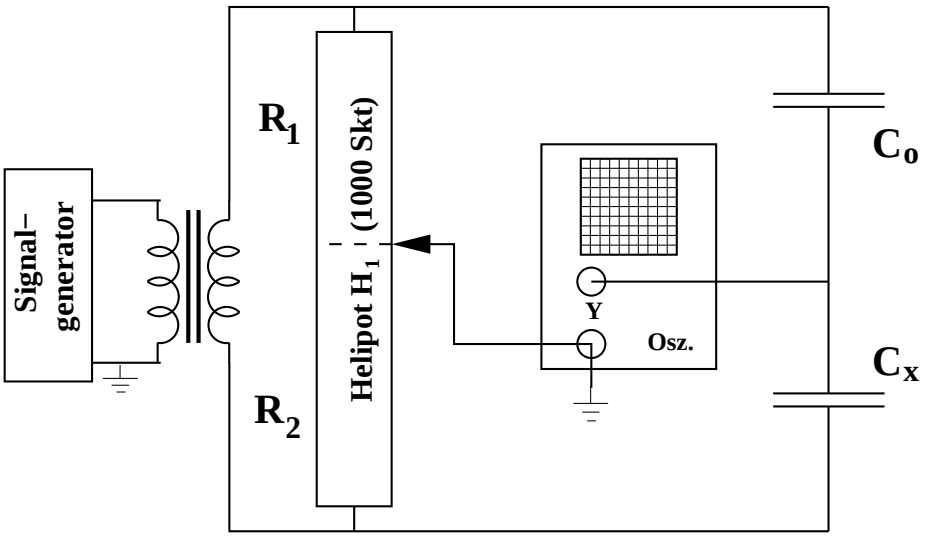


Abbildung 234.1: Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom zur Messung der Kapazität eines Kondensators mit einem Oszillographen als Nullinstrument.

Bergmann-Schäfer, Bd. II, Elektrische Schwingungen und Wellen;
Alonso-Finn, Physics; Weizel, Theoretische Physik I, Kap. C IV, §9;
Praktikumslehrbücher: Walcher; Westphal; Geschke;
insbesondere Anhang A4 in dieser Praktikumsanleitung;
Spezielle Literatur: Tietze/Schenk, Passive RC- und LRC-Netzwerke; aktive Filter.

234.1 Erläuterungen

Die Eigenschaften von Serien- und Parallelschaltkreisen mit Impedanzen (Widerstand R, Kapazität C, Induktivität L) bei anliegender Wechselspannung U_0 folgen – wie auch bei Gleichspannungsschaltungen – aus den Kirchhoffschen Regeln, also aus der Erhaltung der elektrischen Ladung und der Energie.

234.1.1 Messung von Kapazitäten

Aus der komplexen Abgleichbedingung der Wheatstoneschen Brücke für Wechselstrom (Abb. 234.1),

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_0}{Z_x}, \tag{234.1}$$

folgt in diesem Fall (verlustfreier Kondensator)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C_0}. \tag{234.2}$$

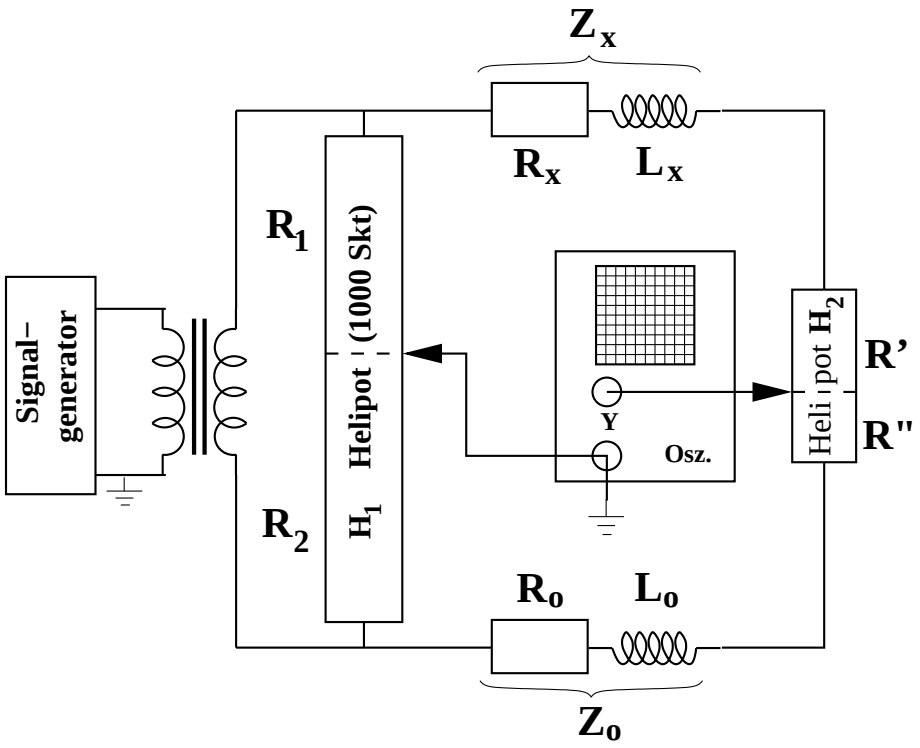


Abbildung 234.2: Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom zur Messung der Induktivität einer Spule mit einem Oszillographen als Nullinstrument.

234.1.2 Messung von Induktivitäten

Bei Spulen lässt sich der Ohmsche Widerstand meist nicht vernachlässigen. Die Abgleichbedingung ergibt dann zunächst:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x + i\omega L_x}{R_0 + i\omega L_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_x}{R_0}. \tag{234.3}$$

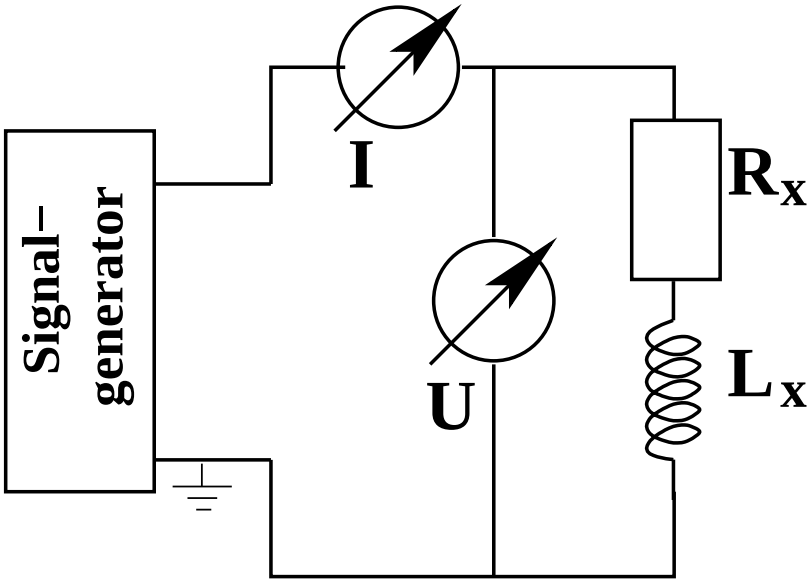
Beide Bedingungen zugleich lassen sich im allgemeinen nicht ohne weiteres erfüllen. Deshalb benutzen wir ein weiteres Potentiometer H_2 zum Phasenabgleich (Abb. 234.2). Dann lautet die Abgleichbedingung:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_x + R'}{R_0 + R''}. \tag{234.4}$$

Aufgabe 234.A: *Erklären Sie anhand eines Zeigerdiagramms die Wirkungsweise dieses Phasenabgleichs.*

234.1.3 Messung von Impedanzen

Wechselstromwiderstände können auch durch eine Strom-Spannungsmessung bestimmt werden (siehe Abb. 234.3).



L_x = Induktivität der unbekannten Spule
R_x = Ohmscher Widerstand der unbekannten Spule
I, U = Messinstrumente für Strom und Spannung

Abbildung 234.3: Strom–Spannungmessung zur Bestimmung eines Wechselstromwiderstands.

234.1.4 RC-Phasenschieber

Ein Phasenschieber ist eine Schaltung, die es gestattet, die Phase φ einer Ausgangsspannung U_{AB} relativ zur Eingangsspannung U_E zu variieren und dabei die Ausgangsspannung konstant zu lassen. Eine Prinzipschaltung mit zugehörigem Zeigerdiagramm ist in Abb. 234.4 dargestellt.

Aufgabe 234.B: *Erklären Sie die Wirkungsweise eines Phasenschiebers anhand des Zeigerdiagramms. Was passiert, wenn $R_1 \neq R_2$ ist? Kann man statt R_1, R_2 auch zwei Kondensatoren oder zwei Spulen verwenden? Wie müssen R und C bemessen sein, damit die Phase von etwa $0° - 180°$ variiert werden kann?*

Welche anderen, einfacheren Schaltungen zum Phasenschieben von Spannungen kennen Sie? Welchen Nachteil haben sie?

Aufgabe 234.C: *Wie groß ist der maximale Strom im RC-Zweig?*

Beachten Sie: *Hier wird die Phase zweier Spannungen gegeneinander verschoben! Es gibt außerdem noch weitere Phasendifferenzen, so z.B. die zwischen Spannung und Strom im RC-Zweig. Wo ist dieser Phasenwinkel im Zeigerdiagramm zu finden?*

234.1.5 Elektrischer Schwingkreis

Hier soll verstanden werden, wie die Resonanzkurve, Güte, Eigenfrequenz etc. eines elektrischen Schwingungskreises durch formale „Übersetzung“ der gleichen Größen eines mechanischen Schwing-

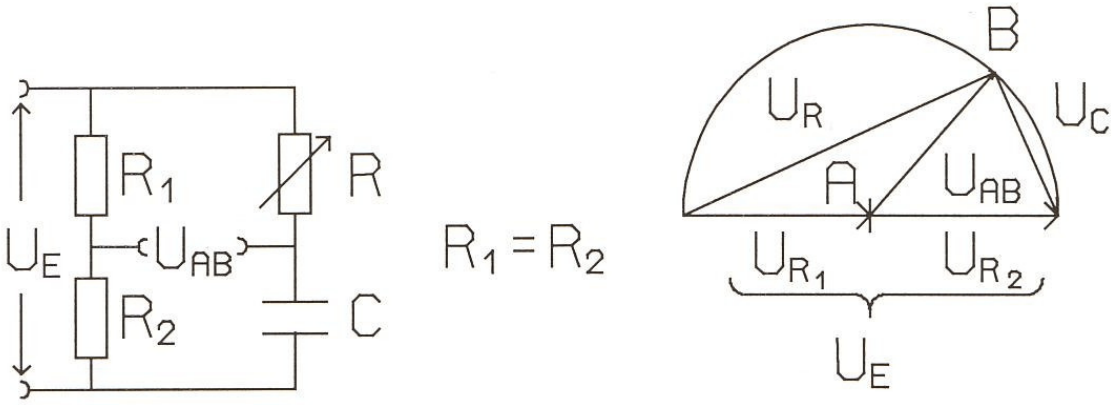
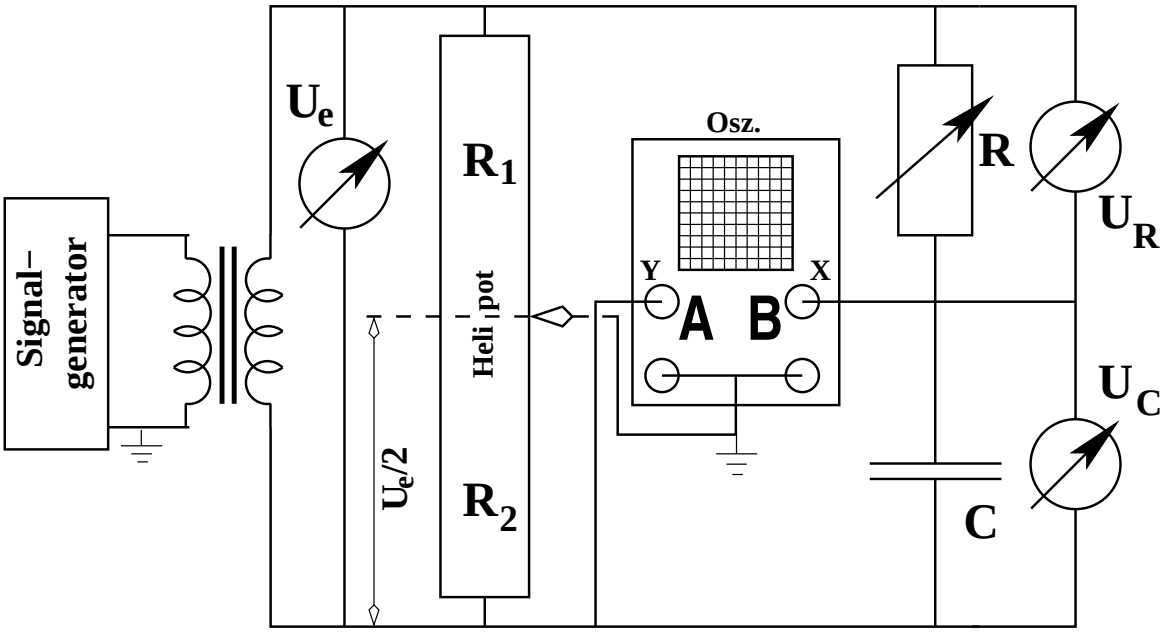


Abbildung 234.4: Phasenschieber: Prinzipschaltung und Zeigerdiagramm.



Signalgenerator = 10 V, 1 kHz, sinusförmig
R = Schiebewiderstand (0 – 230) Ω, Belastbarkeit 1,5 A
C = 10 µF
U_e, U_R, U_C = 3 Spannungsmessgeräte
Helipot = in Stellung $R_1 = R_2 = 500$ Skt
X = X-Eingang des Oszillographen
Oszillograph: X-,Y-Eingänge werden auch mit CH1, CH2 bezeichnet.

Abbildung 234.5: Schaltung Phasenschieber.

körpers, in diesem Falle des Drehpendels, gewonnen werden können. Dazu muss man eine Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung aufstellen, die formal der des periodisch angeregten Drehpendels gleicht.

Für den Serienschwingkreis (siehe Abb. 234.7) gilt:

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U_E \cos(\omega t). \tag{234.5}$$

ω ist die Kreisfrequenz von U_E, also am Generator einstellbar. Die Spannungen auf der linken Seite können durch den Strom $I(t)$, der überall gleich ist, ausgedrückt werden:

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I \,\mathrm{d}t = U_E \cos(\omega t). \tag{234.6}$$

Der Strom kann durch die fließende Ladung ausgedrückt werden: $I(t) = \dot{q}(t)$:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U_E \cos(\omega t). \tag{234.7}$$

Aufgabe 234.D: *Wie lautet die analoge Differentialgleichung des Drehpendels?*

Aufgabe 234.E: *Welches sind korrespondierende physikalische Größen bei Drehpendel und Serienschwingkreis? Was ist die „Auslenkung“ beim Schwingkreis?*

Die Lösung von Gleichung 234.7 für $q(t)$ lautet: $q(t,\omega) = q_0(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ mit

$$q_0(\omega) = \frac{U_E}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2}} \tag{234.8}$$

und

$$\tan\alpha = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{234.9}$$

Weiter erhält man durch Einsetzen in die entsprechenden Ausdrücke:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad Q = \omega_0\frac{L}{R}\left(= \sqrt{\frac{Z_C Z_L}{R}}\right), \quad \omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \tag{234.10}$$

Die Ladung $q(t)$ kann leicht als Spannung am Kondensator gemessen werden: $U(t,\omega) = q(t,\omega)/C$ und andererseits $U(t,\omega) = U(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ mit der „Resonanzkurve“

$$U(\omega) = U_E\omega_0^2\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2}}. \tag{234.11}$$

Für $\omega = \omega_0$ folgt daraus im Maximum $U_0 = U(\omega_0) = U_E Q$. Außerdem ist wie beim Drehpendel: $\omega_0/\Delta\omega \cong Q$.

234.2 Versuchsdurchführung

Bemerkung:
Es ist unbedingt **vor dem Versuch** die Betriebsanleitung des Oszillographen zu studieren.

Weder ist der Ausgang der Signalgeneratoren erdfrei, noch der Eingang der Oszillographen. Bei den in Abb. 234.1, 234.2 und 234.5 dargestellten Schaltungen besteht die Gefahr eines Kurzschluss.
Frage: Wieso?
Um das Problem zu lösen, werden die Signalgeneratoren über einen „Trenntrafo“ mit der Schaltung verbunden. Bei der Untersuchung des elektrischen Schwingkreis wird ebenfalls ein „Trenntrafo“ hinter dem Signalgenerator eingesetzt, allerdings aus einem anderen Grund: Der Innenwiderstand der Signalquelle soll herabgesetzt werden.

234.2.1 Messung von Wechselstromwiderständen

Aufgabe 234.a: *Mit der in Abb. 234.1 dargestellten Schaltung ist die Kapazität eines Kondensators zu messen.*

Aufgabe 234.b: *Mit der in Abb. 234.2 dargestellten Schaltung ist die Induktivität einer Spule zu messen.*

Aufgabe 234.c: *Mit der in Abb. 234.3 dargestellten Schaltung ist die in Aufgabe 234.b benutzte Spule auszumessen. Dabei ist der Einfluss der Messgeräte auf die Messung zu diskutieren. Es ist unter Benutzung des bekannten Spulenwiderstandes (mit einem Unigor oder einem DMM zu messen) ein Zeigerdiagramm zu zeichnen und hieraus L und φ zu bestimmen. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert von L mit dem aus Aufgabe 234.b.*

234.2.2 Phasenschieber

Aufgabe 234.d: *Bei der in Abb. 234.5 dargestellten Schaltung ist R von 0 bis R_{max} und $R = \infty$ zu variieren und eine Tabelle der Wertepaare U_R und U_C aufzunehmen.*

Dann wird das Zeigerdiagramm maßstäblich gezeichnet und alle Paare U_C, U_R eingetragen, um zu zeigen, dass der Punkt B immer auf dem Halbkreis mit dem Durchmesser U_E liegt.

Beobachten Sie die Vorgänge auf dem Oszillographen und diskutieren Sie die Figuren.

Frage: *Was ist eine Lissajous-Figur? Wie kann man sie auf dem Oszillographenschirm sichtbar machen?*

234.2.3 Frequenzabhängige Spannungsteiler

Durch den Transformator hinter dem Generator (siehe Abb. 234.7) kann U_e als nahezu widerstandslose Spannungsquelle betrachtet werden, der ein frequenzabhängiger Spannungsteiler nachgeschaltet ist. In allen Fällen ist $R = 100\,\Omega$, $C \approx 1{,}5\,\mu\text{F}$. Die Induktivität L ist eine reine Luftspule

mit großem Streufeld. Achten Sie darauf, dass diese nicht nahe bei anderen Geräten und nicht direkt auf der Tischplatte, sondern erhöht steht; der Tisch hat einen metallischen Unterbau, und das Resopal hat oft eine Metalleinlage mit entsprechender Rückwirkung auf das Magnetfeld. Der Ohmsche Widerstand dieser Spule ist bekannt ($R_L \approx 10\,\Omega$) und bleibt zunächst unberücksichtigt.

Aufgabe 234.e: *Für alle drei Schaltungen in Abb. 234.6 ist die Ausgangsspannung $U_A(\nu)$ für festgehaltene Amplitude der Eingangsspannung U_E im Frequenzbereich von (200 – 5000) Hz zu messen und doppeltlogarithmisch in normierten Koordinaten darzustellen.*

1. *Halten Sie die Amplitude von U_E immer konstant!*
2. *Verteilen Sie Ihre zu messenden Frequenzen so, dass diese in einer logarithmischen Frequenzdarstellung einigermaßen gleichmäßig verteilt sind.*
3. *Für die grafische Darstellung normieren Sie wie folgt:*
   - **Abszisse:** $\Omega = \nu/\nu_{gr}$
     $\rightarrow$ *für Tief- und Hochpass:* $2\pi\nu_{gr} = \omega_{gr} = 1/RC$
     $\rightarrow$ *für das Sperrfilter:* $\nu_{gr} = \nu_0$ *(aus der Messung)*
   - **Ordinate:** $A = U_A/U_E$
     (A = „Übertragungsfunktion“)
   - *A wird gegen Ω doppeltlogarithmisch aufgetragen.*
4. *Tragen Sie in dieser Darstellung eine dB-Skala für die Ordinate ein.*

Aufgabe 234.f: *Für* **Tief- und Hochpass** *sind die Grenzfrequenzen ν_{gr}, bei denen $U_A = U_E \cdot 1/\sqrt{2}$ ist, zu bestimmen und mit dem theoretischen Wert $2\pi\nu_{gr} = \omega_{gr} = 1/RC$ zu vergleichen.*

Aufgabe 234.g: *Für das* **Sperrfilter** *ist die Unterdrückungsgüte*

$$Q'_{exp} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{234.12}$$

zu bestimmen; $\Delta\nu$ ist der Frequenzbereich, innerhalb dessen $U_A < U_E/\sqrt{2}$ ist. Vergleichen Sie den gefundenen Wert Q'_{exp} mit dem theoretischen Wert

$$Q'_{theo} \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega(3\,\mathrm{dB})} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \tag{234.13}$$

Beachten Sie: Dieses Q' ist die „Unterdrückungsgüte“ und nicht die Kreisgüte Q; letztere wäre ∞, da wir einen verlustlosen Kreis (d.h. der Ohmsche Widerstand der Induktivität wird vernachlässigt) vorausgesetzt haben. Auch für reale Filteranordnungen ist die Kreisgüte Q immer noch viel größer als die Unterdrückungsgüte Q'.

Aufgabe 234.h: *Wodurch wird für das Sperrfilter das größte Abschwächungsverhältnis bestimmt?*

Wie äußert sich die Kreisgüte Q (bestimmt durch den endlichen Spulenwiderstand R_L) in diesem Bild?

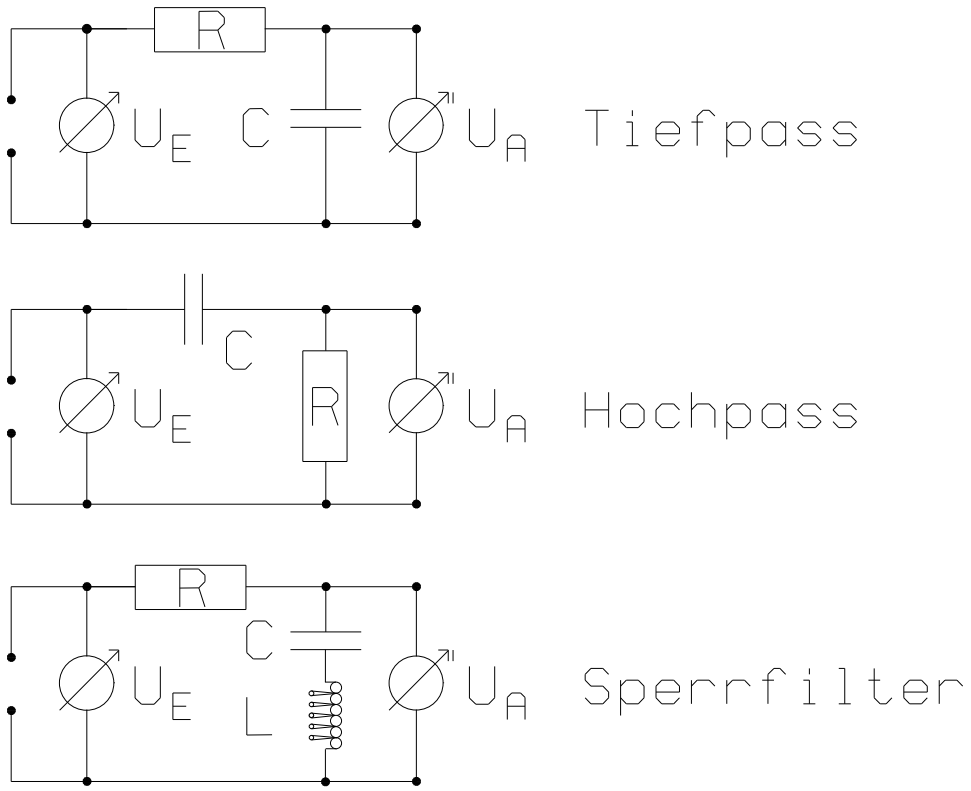


Abbildung 234.6: Frequenzabhängige Spannungsteiler, die als Filter eingesetzt werden können.

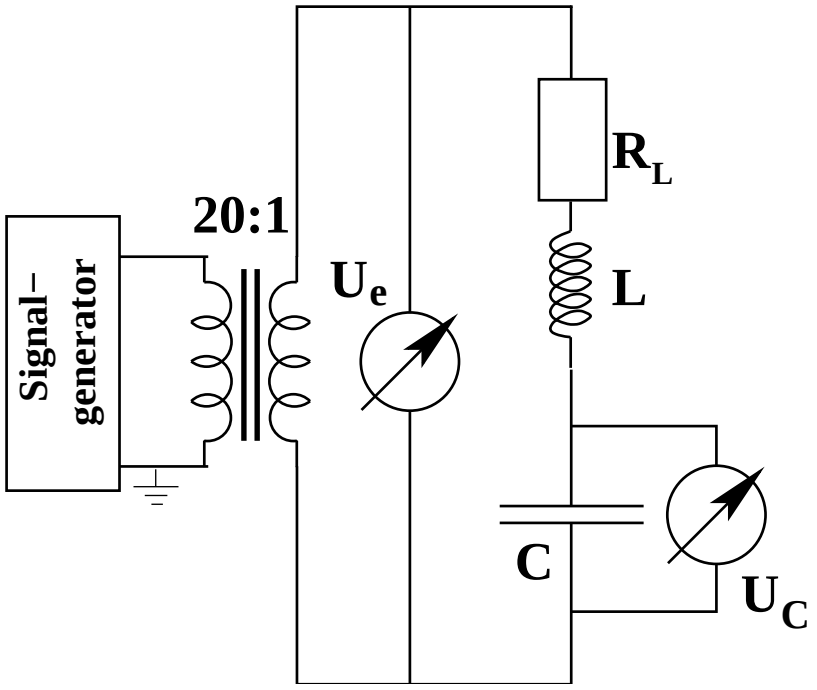


Abbildung 234.7: Elektrischer Schwingkreis.

234.2.4 Elektrischer Schwingkreis

Ein Schwingkreis (siehe Abb. 234.7), bestehend aus einem Kondensator C und einer Induktivität L mit dem eigenen Ohmschen Widerstand R_L, wird durch eine angelegte Wechselspannung U_E zum Schwingen angeregt; die erzeugte Schwingungsamplitude U wird am Kondensator als Funktion der Frequenz der Spannung U_E gemessen. Die Spannung U_E ($\approx$ 0,5 V) wird der Sekundärseite eines Transformators entnommen, dessen Primärseite von einem Tonfrequenzgenerator gespeist wird. Der Transformator hat eine Spannungsübertragung von etwa 20:1 und hat den Zweck, den relativ großen Ausgangs(innen)widerstand des Generators (50 Ω) auf einen sehr kleinen Wert herabzusetzen. Man darf daher die Spannungsquelle U_E als ideale Spannungsquelle, d.h. ohne Innenwiderstand betrachten. Als Induktivität L wird die Luftspule aus Abschnitt 234.2.3 verwendet.

Aufgabe 234.i: *Messen Sie die Resonanzkurve (Spannung über dem Kondensator) mit der vorgesehenen Spule (R_L bekannt) und einer Kapazität von etwa 1,5 µF im Bereich von ungefähr (0 – 2000) Hz.*

Bestimmen Sie aus dieser Messung: ω_0, ω_{max}, L und Q, letzteres aus Resonanzbreite, Resonanzhöhe sowie aus ω_0, L und R_L, also auf drei Weisen.

1. Achten Sie bei der Aufnahme der Resonanzkurve darauf, dass die Amplitude von U_E immer konstant bleibt, was Sie dadurch erreichen können, dass Sie am Tonfrequenzgenerator den Pegel verändern.

2. Verteilen Sie Ihre Messpunkte so, dass Sie im Bereich der Resonanz mehr Punkte haben als auf den Flanken.

3. Zeichnen Sie die Resonanzkurve auf Millimeter-Papier; Sie können hier als Abszisse einfacherweise ν wählen.

4. Dann bestimmen Sie:
   - Q aus der Resonanzüberhöhung:
     $U_A(\omega_{\max}) = Q \cdot U_A(\omega = 0)$,
   - Q aus der Resonanzbreite:
     $\omega_0 = Q \cdot \Delta\omega$ ($\Delta\omega$ aus $1/\sqrt{2}$-Wert),
     $\omega_{\max}$ und ω_0 aus $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$,
     L aus ω_0 und C,
   - Q aus $Q = \omega_0 \cdot L/R_L$.

Versuch 236

Galvanometer zur Strom- und Ladungsmessung

Lernziele: Aufbau, Funktionsweise, Verwendung und Genauigkeit eines Drehspulgalvanometers zur Messung von Strömen und elektrischen Ladungen sollen erlernt werden.
Die Bewegungsformen eines harmonisch schwingungsfähigen Systems unter verschiedenen Dämpfungsgraden sollen experimentell erfahren werden. Das Galvanometer soll zur Messung von Ladungen und von (großen) Widerständen eingesetzt werden.

Kenntnisse: Magnetfeldlinien im Eisen und Luftspalt; mechanische und elektrodynamische Kräfte und Drehmomemente auf die Spule des Galvanometers; Bewegungsgleichung eines Drehspulgalvanometers; Strom- und Ladungsmessung; Entladung eines Kondensators über einen Widerstand; Zeitkonstante eines RC-Gliedes; Strahlengang Lichtzeiger.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik und jedes Lehrbuch zum Physikalischen Praktikum (Westphal, Walcher, Geschke);
Anhang A2 dieser Anleitung.

Geräte: Galvanometer mit verschiedenen Messingscheiben, Skala, Umschalter, Ausschalter, Taster, Kondensator 10 µF, Widerstand R_x, 2 Stöpselrheostaten (1 – 100) Ω; (100 – 2000) Ω; digitales Multimeter, Netzgerät (2 – 4) V, Stoppuhr, Strippen.

236.1 Eigenschaften eines Drehspulgalvanometers

236.1.1 Erläuterungen

Ein Drehspulgalvanometer ist wie in Abb. 236.1 skizziert aufgebaut: Eine starre, rechteckige Drehspule Sp mit den Kantenlängen a und b, dem ohmschen Widerstand R_g und n Windungen hängt drehbar an einem Torsionsdraht in dem aus den Polen eines Permanentmagneten und einem Weicheisenkern K gebildeten zylindrischen Luftspalt. Die Torsionsdrahtaufhängung bewirkt ein Richtmoment D und definiert die Ruhelage der Spule.

Aufgabe 236.A: *Berechnen Sie die Kräfte auf die Leiterstücke der Spule. Hängen diese Kräfte von der Stellung der Spule bezüglich der Ruhelage ab? Wie tragen diese Kräfte zu den Drehmomenten bei, die auf die Spule wirken? Welche Leiterstücke tragen zum elektrodynamischen Drehmoment N_e bei?*

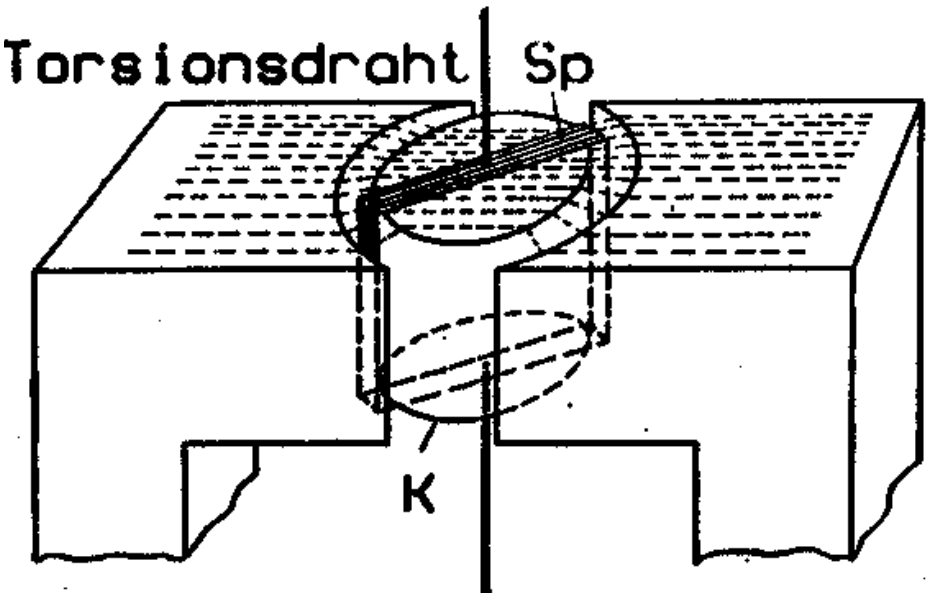


Abbildung 236.1: Drehspulgalvanometer

Sei $\varphi(t)$ der Drehwinkel der Spule gegen die Ruhelage zur Zeit t. Die Torsion des Aufhängedrahtes erzeugt ein Drehmoment vom Betrag

$$N_D(t) = -D \cdot \varphi(t), \tag{236.1}$$

das der Auslenkung entgegen wirkt. Die mechanische Dämpfung der Spulenbewegung, z.B. durch die Luftreibung im Luftspalt, erzeugt auch ein Drehmoment, das proportional der Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ ist. Mit der Dämpfungskonstanten ρ gilt für seinen Betrag

$$N_\mathrm{R}(t) = -\rho \cdot \dot{\varphi}(t). \tag{236.2}$$

Fließt nun ein Strom $I(t)$ durch die Spule, so kommt ein elektrodynamisches Drehmoment N_e hinzu, dessen Betrag sich aus dem Magnetfeld B, der Anzahl der Spulenwindungen n, sowie den Spulenseiten a und b mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetz zu

$$N_e(t) = nabB \cdot I(t) \tag{236.3}$$

berechnet. Mit der dynamischen Galvanometerkonstanten $G \equiv nabB$ kann man dies schreiben als

$$N_e(t) = G \cdot I(t). \tag{236.4}$$

Durch die Drehung der Spule im Magnetfeld wird eine Spannung U_ind induziert:

$$U_\mathrm{ind}(t) = -\dot{\phi} = -G \cdot \dot{\varphi}(t), \tag{236.5}$$

wobei ϕ der magnetische Fluss im Luftspalt ist. Wenn die Spulenenden extern leitend verbunden werden, dann erzeugt diese Induktionsspannung U_{ind} einen „Induktionsstrom“ $I_{\text{ind}}(t) = U_{\text{ind}}/R$.

Aufgabe 236.B: *Warum ist die induzierte Spannung direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit? Hinweis: Kleinwinkelnäherung einer trigonometrischen Funktion ist falsch.*

Aufgabe 236.C: *Aus welchen Anteilen setzt sich der magnetische Fluss ϕ durch die Spule zusammen?*

Sei R_{g} der Widerstand der Spule und R_a der Widerstand des äußeren Schließungskreises. Dann gilt für den Induktionsstrom:

$$I_{\text{ind}} = \frac{U_{\text{ind}}}{R_a + R_{\text{g}}} = -\frac{G}{R_{\text{g}} + R_a}\dot{\varphi}. \tag{236.6}$$

Insgesamt fließt somit der Strom $I + I_{\text{ind}}$ durch die Spule, und Gleichung 236.4 für N_e muss ergänzt werden zu

$$N_e = GI - \frac{G^2}{R_{\text{g}} + R_a}\dot{\varphi}. \tag{236.7}$$

Wird das Trägheitsmoment des Drehsystems mit Θ bezeichnet, so ergibt sich für das Gesamtdrehmoment N:

$$N = \Theta\ddot{\varphi} = -D\varphi - \rho\dot{\varphi} + GI - \frac{G^2}{R_{\text{g}} + R_a}\dot{\varphi}. \tag{236.8}$$

Somit lautet schließlich die Differentialgleichung für $\varphi(t)$:

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi}(t) + \left(\rho + \frac{G^2}{R_{\text{g}} + R_a}\right) \cdot \dot{\varphi}(t) + D \cdot \varphi(t) = GI(t). \tag{236.9}$$

Aufgabe 236.D: *In der Drehmomentbilanz (Gleichung 236.8) ist ein Term vernachlässigt worden, der von der Selbstinduktion L der Spule herrührt. Wie lautet dieser Term? Mit welcher Begründung kann man ihn vernachlässigen?*

Ein Galvanometer (z.B. Mavometer, Unigor) wird häufig zur **Messung einer konstanten Stromstärke** I benutzt. In diesem Fall verschwinden nach dem Einschwingen die zeitlichen Ableitungen in Gleichung 236.9, und man erhält:

$$D \cdot \varphi = G \cdot I \tag{236.10}$$

oder

$$\varphi = \frac{G}{D} \cdot I = c_I \cdot I. \tag{236.11}$$

Der Ausschlag φ des Galvanometers ist der Stromstärke I proportional. Die Proportionalitätskonstante $c_I = \varphi/I$ bezeichnet man als Stromempfindlichkeit.

Aufgabe 236.E: *Wie ändert sich die Aussage von Gleichung 236.11, wenn der Weicheisenkern innerhalb der Spule weggelassen wird und die Polschuhe des Permanentmagneten eben geformt sind?*

Wie bereits erwähnt rührt das Drehmoment $G \cdot I$ auf der rechten Seite dieser Gleichung vom Messstrom durch das Galvanometer her. Ein konstanter Strom I ändert an der Bewegungsform der Drehspule nichts. Transformiert man zur Winkelkoordinate $\psi = \varphi + GI/D$, die den Ausschlag relativ zum asymptotischen Galvanometerausschlag $\varphi = GI/D$ beim Strom I beschreibt, so verschwindet die rechte Seite; die Differentialgleichung wird homogen.

Betrachtet man den einfachen Fall des Schwingens **um die Ruhelage** so ist $I = 0$ und man kann φ beibehalten. Man erhält:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_\mathrm{g} + R_a}\right)\dot{\varphi} + \frac{D}{\Theta}\varphi = 0. \tag{236.12}$$

Mit $2\beta := \frac{1}{\Theta}\left(\rho + G^2/\left(R_a + R_\mathrm{g}\right)\right)$ und $\omega_0^2 := D/\Theta$ kann man schreiben

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0. \tag{236.13}$$

Aufgabe 236.F: *Prüfen Sie nach, dass β und ω_0 die Dimension einer reziproken Zeit haben.*

Die Lösungen von Gleichung 236.13 werden in Anhang A2 der Praktikumsanleitung diskutiert. Von besonderer Bedeutung für den Einsatz als Messinstrument ist der **aperiodische Grenzfall**. Er tritt für $\beta = \omega_0$ ein, d.h. für

$$\frac{1}{2\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_\mathrm{g} + R_a}\right) = \sqrt{\frac{D}{\Theta}}. \tag{236.14}$$

Löst man diese Gleichung nach dem äußeren Widerstand R_a auf, so ergibt sich:

$$R_a = \frac{G^2}{2\sqrt{\Theta D} - \rho} - R_\mathrm{g} =: R_\mathrm{Gr}. \tag{236.15}$$

R_Gr wird als Grenzwiderstand bezeichnet.

236.1.2 Versuchsdurchführung

Justage Lichtzeiger

Der Winkelausschlag des Galvanometers wird mit einem Lichtzeiger sichtbar gemacht. Unter der Spule ist ein kleiner Spiegel angebracht. Ein beleuchteter Spalt steht im Brennpunkt einer Meniskuslinse, die nahe am Spiegel angebracht ist. Nach Durchsetzen der Linse fällt das Licht des Spaltes parallel auf den Spiegel; eine Winkeländerung $\Delta\varphi$ des Spiegels ändert die Richtung des reflektierten Strahls um $2\Delta\varphi$. Der reflektierte Strahl durchsetzt erneut die Meniskuslinse, welche so den Beleuchtungsspaltes auf eine gekrümmte Skala oberhalb des Spaltes abbildet. Dies erfordert, dass der Krümmungsradius der Skala und die Brennweite der Meniskuslinse gleich sind (was durch die Abmessungen der Geräte gesichert ist). Wegen des Reflexionsgesetzes (Einfalls- = Ausfallswinkel) muss der Spiegel vertikal mittig zwischen Beleuchtungsspalt und Skala stehen; andernfalls liegt das Bild des Beleuchtungsspaltes nicht auf der Skala. Horizontal muss der Krümmungsmittelpunkt der Skala im Spiegel liegen; andernfalls ändert sich der Abstand zwischen Skala und Spiegel mit dem Ausschlag φ und damit die Schärfe der Abbildung. Die Meniskuslinse ist so orientiert einzusetzen, dass die Brennweiten-Abstandsbedingung über einen möglichst großen Winkelbereich

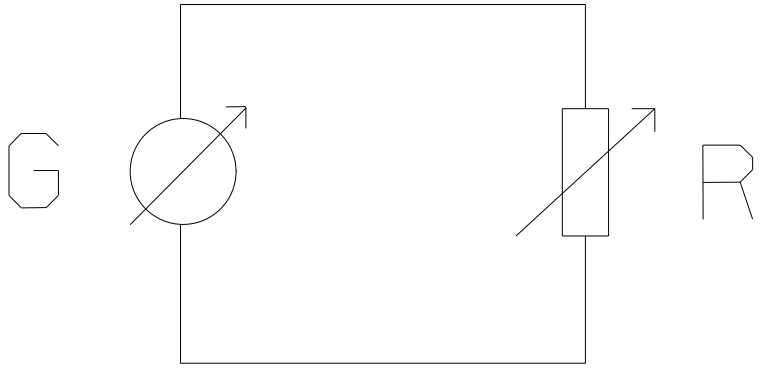


Abbildung 236.2: Schaltung zur Bestimmung des Grenzwiderstands.

φ eingehalten wird. Geringfügige Dejustagen der Apparatur können durch Querverschiebung der Meniskuslinse ausgeglichen werden.

Dämpfungsverhalten

Aufgabe 236.a: *Bewegen Sie mit der Fingerspitze die Spule des Galvonmeters* ***vorsichtig*** *einmal mit und einmal ohne kurzgeschlossenen äußeren Stromkreisreis: Die (elektrische) Dämpfung ist spürbar.*

Aufgabe 236.b: *Mit Hilfe der in Abb. 236.2 dargestellten Schaltung lässt sich der Grenzwiderstand R_{Gr} ermitteln.*

Geben Sie dazu dem Galvanometer eine kleine Auslenkung und beobachten Sie die nachfolgende Bewegung bei verschiedenen Werten von R_a, die Sie mit einem Stöpselwiderstand darstellen. Ist der aperiodische Grenzfall erreicht, kann man $R_{Gr} = R_a$ mit einem Widerstandsmessgerät messen, z.B. mit einem analogen (z.B. Unigor) oder digitalem (DMM) Multimeter (Beim Unigor die Anleitung auf der Rückseite des Gerätes beachten).

Bringen Sie nun die Zusatzgewichte an und messen Sie R_{Gr} erneut.

Erklären Sie anhand von Gleichung 236.15 den Unterschied.

Aufgabe 236.G:

1. *Wozu kann man die Kenntnis von R_{Gr} sinnvoll benutzen?*
2. *In der Praxis wählt man einen geringfügig größeren Widerstand als R_{Gr}. Warum?*

Stromempfindlichkeit c_I und Innenwiderstand R_g

Betrachten Sie die Schaltung in Abb. 236.3. Die Widerstände R_1 und R_2 der Potentiometerschaltung sind so zu wählen, dass $R + R_g \gg R_2$ gilt. Damit errechnet sich der Gesamtstrom nach:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}. \tag{236.16}$$

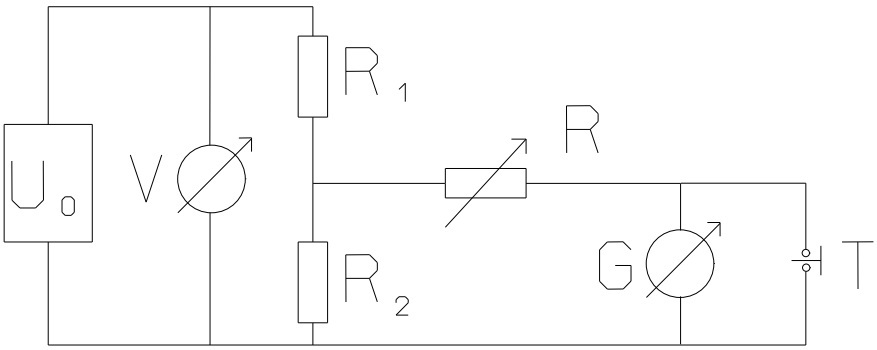


Abbildung 236.3: Schaltung zur Bestimmung der Stromempfindlichkeit.

Der Strom, der durch das Galvanometer fließt, beträgt dann:

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{R_2}{R_{\mathrm{g}} + R} I_0 = \frac{R_2}{R_{\mathrm{g}} + R} \cdot \frac{U_0}{R_1 + R_2}. \tag{236.17}$$

Mit Gleichung 236.11 folgt:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{R_1 + R_2}{c_I U_0 R_2} (R_{\mathrm{g}} + R). \tag{236.18}$$

Aufgabe 236.c: *Messen Sie diesen linearen Zusammenhang durch und stellen Sie ihn grafisch dar.*

Aufgabe 236.d: *Bestimmen Sie aus der Steigung der Fit-Geraden die Stromempfindlichkeit c_I.*

Aufgabe 236.e: *Bestimmen Sie den Widerstand der Galvanometerspule R_g aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der R-Achse.*

Aufgabe 236.f: *Messen Sie R_g mit einem DMM oder einem Unigor und vergleichen Sie die Ergebnisse.*

Aufgabe 236.g: *Messen Sie jeweils einmal den Ausschlag φ für ein bestimmtes R_a und damit c_I mit verschiedenen aufgesteckten Zusatzgewichten.*

Erklären Sie das Resultat mit Gleichung 236.11.

Aufgabe 236.H: *Wie kann man die Empfindlichkeit des Galvanometers steigern?*

Aufgabe 236.I: *Wo liegen die prinzipiellen Grenzen für die Empfindlichkeit eines Galvanometers?*

Aufgabe 236.J: *In welcher Einheit wird die Stromempfindlichkeit hier sinnvoll angegeben?*

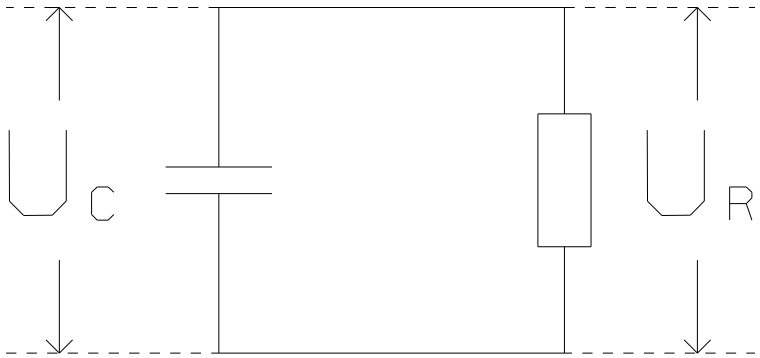


Abbildung 236.4: Schaltung zur Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.

236.2 Ballistisches Galvanometer

236.2.1 Erläuterungen

In der Schaltung zur Entladung eines Kodensators über einen Widerstand (sieheAbb. 236.4) gilt:

$$U_C + U_R = 0 \tag{236.19}$$

$$U_C = \frac{Q}{C} \tag{236.20}$$

$$U_R = RI = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{236.21}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{RC}. \tag{236.22}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{236.23}$$

Um Ladungen mit einem Galvanometer zu messen, nutzt man die Proportionalität zwischen der Ladungsmenge Q und dem ersten Maximalausschlag des Galvanometers φ_m. Für den Fall kleiner Dämpfung ($\beta \ll \omega_0$) und unter der Annahme, dass die Stromflusszeit Δt klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers ist, gilt:
Der Strom $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ erzeugt das Drehmoment $N = G\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ und erteilt dem System in der Zeit Δt den Drehimpuls

$$\Theta\dot{\varphi} = G\int_0^{\Delta t}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = G\int_0^{Q}\mathrm{d}Q = GQ. \tag{236.24}$$

Der Energieerhaltungssatz liefert, dass im Umkehrpunkt φ_m die Rotationsenergie

$$\frac{\Theta}{2}\left(\dot{\varphi}_{(\Delta t)}\right)^2 \tag{236.25}$$

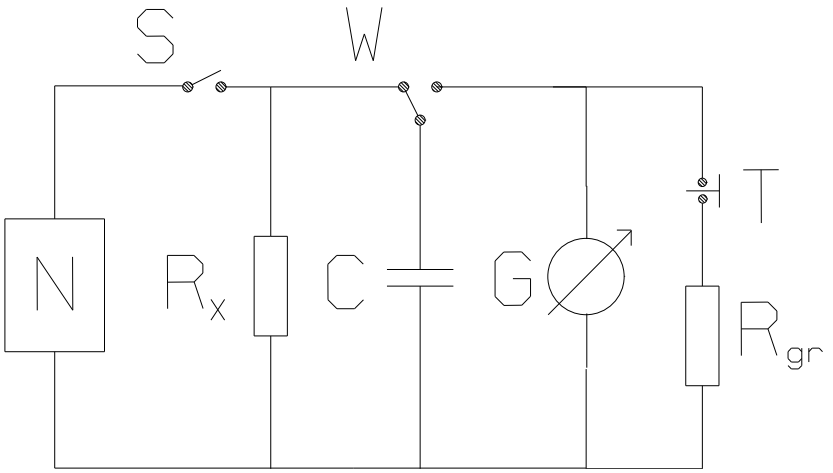


Abbildung 236.5: Schaltung zur Bestimmung eines großen Widerstandes mit einem ballistischen Galvanometer. Es ist sinnvoll, zur Versuchsdurchführung die Messingscheiben im Abstand $2R = 6\,\text{cm}$ anzubringen.

in potentielle Energie umgewandelt worden ist:

$$\frac{\Theta}{2}\left(\dot{\varphi}_{(\Delta t)}\right)^2 = \frac{G^2Q^2}{2\Theta} = \frac{D}{2}\varphi_m^2. \tag{236.26}$$

Hieraus folgt:

$$\varphi_m = \frac{G}{\sqrt{D\Theta}}Q, \tag{236.27}$$

was zur Messung von elektrischen Ladungen (evtl. nach einer Eichung) genutzt werden kann.

236.2.2 Versuchsdurchführung

Aufgabe 236.h: *Es ist ein großer Widerstand mit der in Abb. 236.5 gezeigten Schaltung zu messen.*

Verfahren: *Ein bekannter Kondensator wird auf die Spannung U_0 aufgeladen. Dann entlädt man den Kondensator über den unbekannten Widerstand R eine zumessende Zeit t lang; zur Zeit t_0 öffnet man Schalter S, zur Zeit t_1 klappt man W um. Dabei misst man $t = t_1 - t_0$ und φ_m. Die Messung wird für verschiedene Entladungszeiten t durchgeführt.*

Die halblogarithmische Darstellung der so gemessenen Funktion $\varphi_m(t) = f(t)$ ist eine Gerade. Die Steigung der Fit-Geraden liefert die Zeitkonstante RC, und damit R. Die Auswertung soll grafisch geschehen.

Frage:
Warum braucht man den Maximalausschlag φ_m nicht in Restladung Q auf dem Kondensator umzurechnen?

Aufgabe 236.K: *Welche anderen Methoden zur Messung von Widerständen kennen Sie? Warum eignen sich diese Schaltungen nicht zur Messung sehr großer Widerstände?*

Versuch 238

Transformator

Lernziel: Transformatoren werden in der Technik zur Umwandlung elektrischer Energie gegebener Spannung in elektrische Energie anderer Spannung benutzt; diese Umwandlung erfolgt weitgehend verlustfrei. Die Übertragungseigenschaften eines Transformators und dessen genaue Behandlung sollen kennengelernt und in Messungen erfahren werden. Die für die Behandlungen von Wechselstromkreisen wichtigen Größen und Methoden sollen geübt werden.

Kenntnisse: Grundbegriffe des Wechselstroms (Effektivwerte, Schein- und Wirkleistung, Impedanz, Blindwiderstand), des Drehstroms und der Induktion. Aufbau und Wirkungsweise des Transformators, Wattmeter und Leistungsmessung, Zeigerdiagramme; PC-Umgang.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik,
u.a. Bergmann-Schäfer Bd. 2;
Demtröder, Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik;
Weizel, Theoretische Physik, Bd. 1;
G. Bosse, Grundlagen der Elektrotechnik Bd. III (BI Band 194);
Anhang A4 dieser Anleitung.

238.1 Erläuterungen

238.1.1 Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Im folgenden wird die komplexe Darstellung für Wechselstromprobleme benutzt: Impedanzen sind zeit**un**abhängige komplexe Zahlen Z; Ströme und Spannungen werden durch die zeitabhängigen komplexen Zahlen $U = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ und $I = I_0 \cdot e^{i\omega t}$ ($U = ZI$) beschrieben. Die Ströme und Spannungen haben in der komplexen Zahlenebene also Kreise als Orts-Zeit-Kurven. Die Realteile (und die Imaginärteile) von Strom und Spannung liefern die beobachtbaren sinusförmigen Verläufe.

Eine oft recht instruktive Methode ist das „Zeigerdiagramm“. Man zeichnet in der Gaussschen Zahlenebene ein „Momentbild“ der Spannungen (oder Ströme). Die Kirchhoffsche Maschenregel führt zu einem geschlossenen Polygonzug; die Addition der Spannungen erfolgt nach den Regeln der Vektorrechnung.

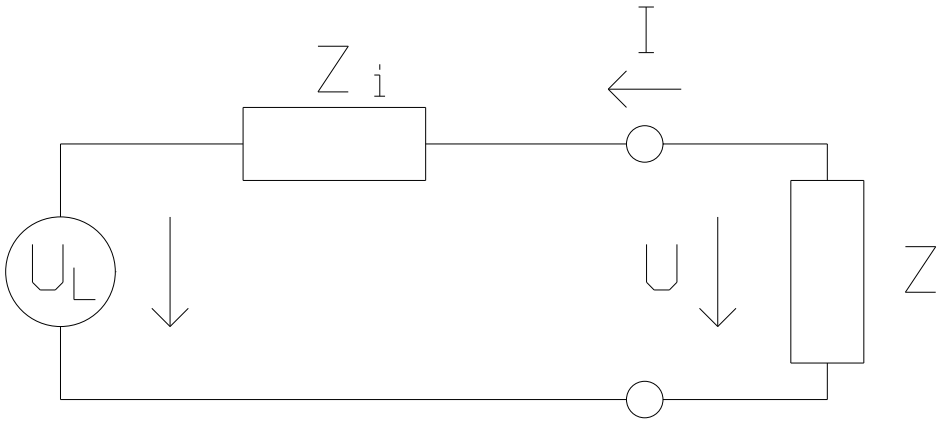


Abbildung 238.1: Belastete reale Wechselspannungsquelle.

238.1.2 Leistungsanpassung

Ist eine reale Spannungsquelle (Leerlaufspannung U_L, Innenimpedanz $Z_i = R_i + iX_i$, Kurzschlussstrom $I_K = -U_L/Z_i$) mit einer Lastimpedanz $Z = R + iX$ abgeschlossen, so gelten mit den Vorzeichen aus Abb. 238.1 die Gleichungen:

$$U = Z_i I + U_L \tag{238.1}$$

und

$$U + ZI = 0. \tag{238.2}$$

Daraus folgt

$$U = \frac{Z}{Z_i + Z} U_L \quad \text{(Spannungsteiler!)}. \tag{238.3}$$

Die der realen Spannungsquelle entzogene Wirkleistung P_W beträgt:

$$P_W = 0.5\,|UI| \cos\varphi, \tag{238.4}$$

Dabei ist φ der Phasenwinkel zwischen U und I. Es gilt außerdem:

$$P_W = 0.5\Re(UI^*), \tag{238.5}$$

wobei $\Re$ der Realteil des komplexwertigen Argumentes (d.h. von UI^*) ist.
Mit $\cos\varphi = R/|Z|$ und $I = -U_L/Z_{ges}$ erhält man

$$P_W = 0.5\frac{R}{|Z + Z_i|^2} \cdot |U_L|^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \cdot U_{L,eff}^2 \tag{238.6}$$

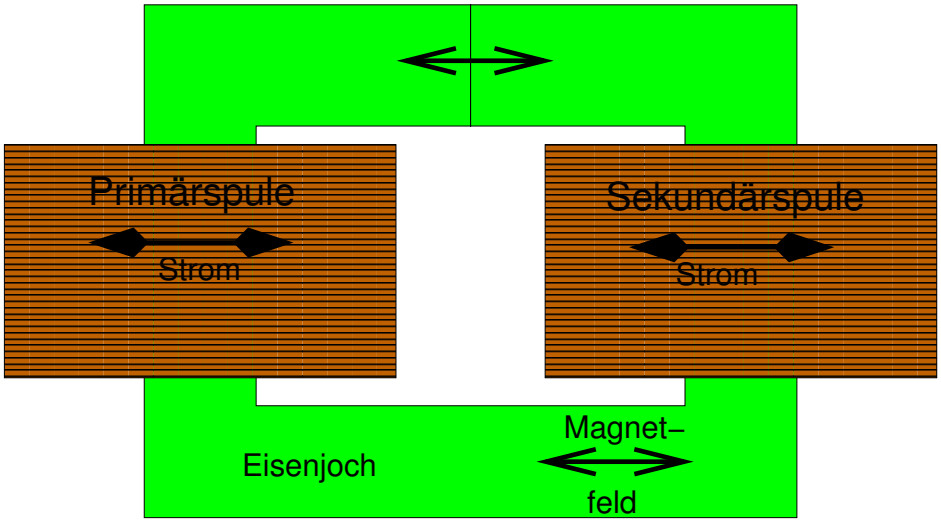


Abbildung 238.2: Seitenansicht Transformator mit 2 galvanisch getrennten Spulen auf einem gemeinsamen Eisenjoch.

Falldiskussion der Leistungsanpassung

1. R und X sollen so gewählt werden, dass $P_{\mathrm{W}}(R, X)$ maximal wird.
   Lösung:
$$X = -X_{\mathrm{i}}; \qquad R = R_{\mathrm{i}}; \qquad P_{\mathrm{W,max}} = \frac{U_{\mathrm{L,eff}}^2}{4R_{\mathrm{i}}} \tag{238.7}$$
2. $R_{\mathrm{i}} = X_{\mathrm{i}} = 0$ (ideale Spannungsquelle), X fest. R ist so zu wählen, dass $P_{\mathrm{W}}(R)$ maximal wird.
   Lösung:
$$R = |X|; \qquad P_{\mathrm{W,max}} = \frac{U_{\mathrm{L,eff}}^2}{2|X|}. \tag{238.8}$$
3. $R_{\mathrm{i}} = 0$, $X = 0$. R ist so zu wählen, dass $P_{\mathrm{W}}(R)$ maximal wird.
   Lösung:
$$R = |X_{\mathrm{i}}|; \qquad P_{\mathrm{W,max}} = \frac{U_{\mathrm{L,eff}}^2}{2|X_{\mathrm{i}}|}. \tag{238.9}$$

238.1.3 Transformator

Wirkungsweise eines Transformators

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, die so angeordnet sind, dass das bei Stromfluss in einer der Spulen entstehende Magnetfeld die Windungsfläche der anderen durchsetzt und umgekehrt (Abb. 238.2). Jede zeitliche Änderung des Stroms in einer Spule induziert in der anderen – aber auch in ihr selbst – eine Spannung.

Man kann daher Leistung von einem mit der Primärspule verbundenen Stromkreis auf einen mit der Sekundärspule verbundenen Kreis übertragen, ohne dass beide Kreise galvanisch (d.h. leitend)

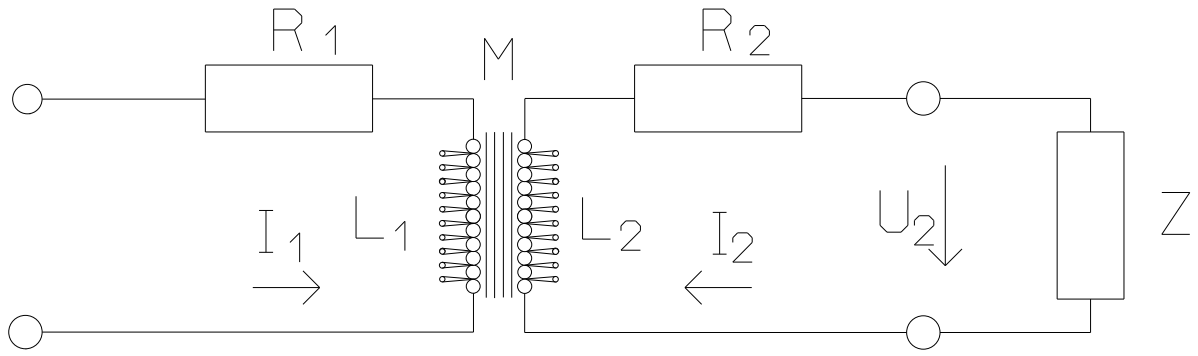


Abbildung 238.3: Transformator als Übertrager in Schaltung

miteinander verbunden sind. Häufig wickelt man beide Spulen auf einen (meist ringförmig geschlossenen) Eisenkern, um zu erreichen, dass **alle** magnetischen Feldlinien die Windungsflächen beider Spulen durchsetzen. Die jeweiligen magnetischen Flüsse Φ_i ($i = 1, 2$) und damit die induzierten Spannungen verhalten sich wie die Windungszahlen der Spulen. Transformatoren dienen u.a. dazu, Wechselspannungen bzw. -ströme unter möglichst geringen Leistungsverlusten herauf- oder herabzusetzen.

Transformatorgleichungen

Die beiden Spulen sind auf ein geschlossenes Eisenjoch (Kern) gewickelt. An die Primärspule legen wir die Wechselspannung U_1 an. Die Sekundärspule schließen wir mit einer Impedanz Z ab (Abb. 238.3). In der Primärspule fließt ein sinusförmiger, gegen U_1 phasenverschobener Strom I_1, der den Kern zeitabhängig magnetisiert. Der alternierende magnetische Fluss induziert in der Sekundärspule eine Wechselspannung. Durch Z und die Spule fließt daraufhin ein Wechselstrom I_2. Auch dieser trägt zur Magnetisierung des Kerns bei und veranlasst eine Rückwirkung des Sekundärkreises auf den Primärkreis (Gegeninduktion). An jeder Spule liegen daher zwei induzierte Spannungen, die den zeitlichen Ableitungen der magnetischen Teilflüsse und damit den zeitlichen Ableitungen der sie erregenden Ströme I_1 bzw. I_2 proportional sind. Mit den in Abb. 238.3 angegebenen Richtungen, den Induktivitäten von Primär- und Sekundärspule L_1 und L_2, der Gegeninduktivität (**m**utual induction) der beiden Spulen M und den zu den Spulen in Reihe geschalteten Widerständen R_1 und R_2 erhält man

$$\begin{aligned} U_1 &= (i\omega L_1 + R_1) \cdot I_1 + i\omega M \cdot I_2 \\ U_2 &= i\omega M \cdot I_1 + (i\omega L_2 + R_2) \cdot I_2. \end{aligned} \tag{238.10}$$

Diese Gleichungen sind ein Spezialfall der allgemeinen „Vierpol-Impedanz-Gleichungen“:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2, \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2. \end{aligned} \tag{238.11}$$

Die Matrix $(\boldsymbol{Z_{jk}})$ nennt man die **Impedanzmatrix**; ihre Elemente für einen Trafo folgen aus dem Vergleich von Gleichungen 238.10 und 238.11. Diese Darstellung ist für die folgenden Umformungen sehr bequem zu handhaben. Ist der Vierpol (in unserem Fall der Trafo) mit der Impedanz Z auf der Sekundärseite abgeschlossen, so gilt $U_2 = -ZI_2$.

Man kann unter Verwendung der obigen Gleichungen mit der Bezeichnung

$$\mathbf{D} := \det Z_{jk} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \tag{238.12}$$

leicht ausrechnen die

$$\text{Spannungsübersetzung:} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z \cdot Z_{21}}{Z \cdot Z_{11} + \mathbf{D}}, \tag{238.13}$$

$$\text{Stromübersetzung:} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z + Z_{22}}, \tag{238.14}$$

$$\text{Eingangsimpedanz:} \quad \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z \cdot Z_{11} + \mathbf{D}}{Z + Z_{22}}. \tag{238.15}$$

Beschreibt man die Sekundärseite als reale Spannungsquelle:

$$U_2 = U_{2,\mathrm{L}} - Z_{2,\mathrm{i}}I_2, \tag{238.16}$$

so gilt für die

$$\text{Innenimpedanz:} \quad Z_{2,\mathrm{i}} = -\frac{\mathbf{D}}{Z_{11}}, \tag{238.17}$$

$$\text{Leerlaufspannung:} \quad U_{2,\mathrm{L}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \cdot U_1, \tag{238.18}$$

$$\text{Kurzschlussstrom:} \quad I_{2,\mathrm{k}} = -\frac{Z_{21}}{\mathbf{D}} \cdot U_1. \tag{238.19}$$

Betriebsverhalten eines Transformators

Die Induktivitäten L_1, L_2 sind proportional zu den Quadraten der Windungszahlen n_1, n_2 von Primär- und Sekundärspule. Für die Gegeninduktivität gilt $M \propto n_1, n_2$. Da der magnetische Fluss nur im Idealfall beide Spulen vollständig durchsetzt, definiert man den **Streukoeffizient**en $\boldsymbol{\sigma := 1 - M^2/(L_1L_2)}$; er ist also umso kleiner, je vollständiger der magnetische Fluss beide Spulen durchsetzt. Für verschwindenden Streufluss gilt: $M^2 = L_1L_2$.

Ein realer Trafo hat Kupfer- und Eisenverluste (Ohmsche Verluste, Wirbelströme, Hystereseverluste). Die Kupferverluste können durch die Widerstände R_1, R_2 beschrieben werden. Für die etwas schwierigere quantitative Behandlung der Eisenverluste siehe z.B. G. Bosse.

Mit den Innenimpedanzmatrixelementen nach Gleichungen 238.10 und 238.11 $Z_{11} = i\omega L_1 + R_1$, $Z_{22} = i\omega L_2 + R_2$ und $Z_{21} = Z_{12} = i\omega M$ erhält man

$$\mathbf{D} = -\sigma\omega^2 L_1L_2 + R_1R_2 + i\omega(L_1R_2 + L_2R_1). \tag{238.20}$$

Im folgenden bedeuten die Symbole für Ströme und Spannungen (z.B. U_1) deren Effektivwerte!

Schließt man den Trafo mit einem reinen Wirkwiderstand $Z = R$ ab, so erhält man z.B. für die **Spannungsübersetzung**:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R\omega M}{\sqrt{\omega^2 \left(L_1(R+R_2) + L_2R_1\right)^2 + \left(\sigma\omega^2 L_1L_2 - R_1(R+R_2)\right)^2}}. \tag{238.21}$$

Die Ausdrücke werden für den allgemeinen Fall eines Trafos mit Kupferverlusten etwas unübersichtlich. Deswegen werden zunächst die Kupferverluste vernachlässigt (d.h. $R_1 = R_2 \stackrel{!}{=} 0$ gesetzt). In diesem Fall (es gelte weiterhin $Z = R$) erhält man für die **Spannungsübersetzung**:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M/L_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma\omega L_2}{R}\right)^2}}. \tag{238.22}$$

Bei unbelastetem Trafo ($R = \infty$, Leerlauf) ist die Spannungsübersetzung gleich M/L_1, d.h. ungefähr gleich dem Verhältnis der Windungszahlen n_2/n_1. Die Spannungsübersetzung nimmt mit wachsender Belastung umso schneller ab, je größer der Streukoeffizient ist, d.h. je schwächer die magnetische Kopplung zwischen den beiden Kreisen ist.

Für die **Stromübersetzung** erhält man

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M/L_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L_2}\right)^2}}. \tag{238.23}$$

Im Kurzschlussfall ($R = 0$) nimmt die Stromübersetzung den Wert M/L_2 an, d.h. sie wird ungefähr gleich n_1/n_2.

Für den Betrag der **Eingangsimpedanz** U_1/I_1 erhält man bei Vernachlässigung der Verluste (d.h. $R_1 = R_2 \stackrel{!}{=} 0$):

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{L_1}{L_2} R \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sigma\omega L_2}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{R}{\omega L_2}\right)^2}}. \tag{238.24}$$

Im Leerlauffall ($R = \infty$) gilt

$$U_1/I_1 = \omega L_1, \tag{238.25}$$

im Kurzschlussfall ($R = 0$) gilt

$$U_1/I_1 = \sigma\omega L_1. \tag{238.26}$$

Im Leerlauf „merkt“ die Spannungsquelle U_1 nur die Selbstinduktion der Primärspule. Im Kurzschluss verhält sich der Trafo wie eine um den Faktor σ kleinere Induktivität.

Für Belastungswiderstände R im Bereich $\sigma\omega L_2 \ll R \ll \omega L_2$ gilt für den Betrag der Eingangsimpedanz $U_1/I_1 = R \cdot (L_1/L_2) \approx R \cdot (n_1/n_2)^2$. Durch Zwischenschalten des Transformators zwischen Quelle und Verbraucher wird die belastende **Impedanz transformiert**. Man kann dies dazu benutzen, mittels geeigneter Wahl des Transformationsfaktors einen Verbraucher an den Innenwiderstand der Quelle anzupassen, um ihr maximale Leistung zu entnehmen (z.B. Anpassung zwischen HiFi-Verstärker und Lautsprecher; siehe auch Versuch 234).

Für den Kurzschlussstrom im Sekundärkreis gilt

$$I_{2,\mathrm{k}} = \frac{M}{\sigma\omega L_1 L_2} \cdot U_1. \tag{238.27}$$

Durch Wahl eines hinreichend großen Streukoeffizienten kann man die bei Kurzschluss fließenden Ströme soweit begrenzen, dass die Wärmebelastung noch zulässig bleibt (Bau von kurzschlussfesten Trafos). In der Regel strebt man jedoch kleine Streukoeffizienten an (Energietechnik: Lastunabhängigkeit der Sekundärspannung; Messtechnik: Geringe Störung empfindlicher Messungen durch magnetische Streufelder).

238.1.4 Symmetrischer Transformator mit Kupferverlusten

Im Versuch soll der Transformator symmetrisch betrieben werden ($n_1 = n_2$). Mit den Bezeichnungen $L = L_1 = L_2$ und $R_\mathrm{V} := R_1 = R_2$ erhält man unter Berücksichtigung der Ohmschen Verluste (Voraussetzung $R_\mathrm{V} \ll \omega L$):

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M/L}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R + R_\mathrm{V}}{\omega L}\right)^2}} \tag{238.28}$$

Macht man die zusätzliche Näherung $R_\mathrm{V} \ll \sigma\frac{(\omega L)^2}{R+R_\mathrm{V}}$, so gelten:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + 2R_\mathrm{V}} \cdot \frac{M/L}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma\omega L}{R + 2R_\mathrm{V}}\right)^2}} \tag{238.29}$$

und

$$\frac{U_1}{I_1} = (R + 2R_\mathrm{V}) \sqrt{\frac{1 + \left(\dfrac{\sigma\omega L}{R + 2R_\mathrm{V}}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{R + R_\mathrm{V}}{\omega L}\right)^2}}. \tag{238.30}$$

Beschreibt man die Sekundärseite des Trafos durch das Bild der realen Spannungsquelle, so gilt:

$$U_{2,\mathrm{L}} = \frac{M}{L} U_1; \quad R_{2,\mathrm{i}} = 2R_\mathrm{V}; \quad X_{2,\mathrm{i}} = \sigma\omega L \tag{238.31}$$

für Leerlaufspannung $U_{2,\mathrm{L}}$, Wirkinnenwiderstand $R_{2,\mathrm{i}}$ und Blindinnenwiderstand $X_{2,\mathrm{i}}$ der Ersatzspannungsquelle ($Z_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + iX_\mathrm{i}$).

Leistungsübertragung und Verluste

Die auf den Sekundärkreis übertragene Wirkleistung $P_{\mathrm{W},2}$ kann man nach dem in Abschnitt 238.1.2 angewandten Verfahren ermitteln. Es gilt:

$$P_{\mathrm{W},2} = \left(\frac{M}{L}\right)^2 \cdot \frac{R}{(R + 2R_\mathrm{V})^2 + (\sigma\omega L)^2} \cdot U_1^2. \tag{238.32}$$

Für

$$R^2 \equiv R_{\mathrm{max}}^2 = 4R_\mathrm{V}^2 + (\sigma\omega L)^2 \tag{238.33}$$

wird die Wirkleistung $P_{\mathrm{W},2}$ maximal. Ist jetzt $2R_\mathrm{V}$ deutlich kleiner als $\sigma\omega L$, so gelten

$$R_{\mathrm{max}} = \sigma\omega L \tag{238.34}$$

und

$$P_{\mathrm{W},2,\mathrm{max}} = \frac{M}{L} \cdot \frac{U_1^2}{2\sigma\omega L}, \tag{238.35}$$

die Spannungsübersetzung U_2/U_1 ist auf $1/\sqrt{2}$ des Leerlaufwertes abgesunken. Die maximal übertragbare Leistung, ist ähnlich wie der maximale (d.h. Kurzschluss-) Strom, umgekehrt proportional zu σ. Im Kurzschluss verschwindet die sekundäre Wirkleistung; der Transformator stellt dann in der behandelten Näherung (keine Verluste) einen reinen Blindwiderstand dar.

Tatsächlich müssen wir bei Leistungsbetrachtungen jedoch die Ohmschen Spulenwiderstände berücksichtigen. Bei der Analyse der Spannungsbeziehungen war das nicht nötig, weil die an den Induktivitäten abfallenden Spannungen i.a. bei weitem überwiegen. Die von den Induktivitäten aufgenommenen Leistungen dagegen sind reine Blindleistungen, d.h. ihr Zeitmittelwert ist Null, so dass die Ohmschen Verluste in der Leistungsbilanz wesentlich werden können.

Die primäre Wirkleistung muss nicht nur die sekundäre Wirkleistung, sondern auch die Verluste decken. Hierzu zählen die sog. Kupferverluste in den Spulen

$$P_{\mathrm{Cu}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2, \tag{238.36}$$

ferner Hystereseverluste, die von der periodischen Ummagnetisierung des Eisenkerns herrühren, und schließlich die Verluste durch Wirbelströme. Die zeitabhängige Magnetisierung erzeugt längs des Umfangs eines Querschnitts durch den Eisenkern induzierte Spannungen, die zu geschlossenen Kreisströmen (Wirbelströmen) im Eisen und damit zu weiteren Ohmschen Verlusten führen. Beschreibt man diesen Sachverhalt ersatzweise durch Einführung einer fiktiven zusätzlichen, getrennten Sekundärwicklung, die nahe am Kurzschluss belastet ist, so sieht man, dass die Wirbelströme neben Wirkleistungsverlusten auch beträchtliche zusätzliche Blindströme in den Wicklungen induzieren können. Man versucht die Wirbelströme zu verringern, indem man den Eisenkern aus gegeneinander isolierten dünnen Blechen (Lamellen) aufbaut und Eisenlegierungen mit relativ hohem spezifischen Widerstand benutzt.

Die primär aufgenommene Wirkleistung setzt sich demnach aus drei Anteilen zusammen:

$$P_{W,1} = P_{W,2} + P_{Cu} + P_{Fe}, \tag{238.37}$$

wobei P_{Fe} die Hysterese- und Wirbelstromverluste zusammenfasst. Bei guten Transformatoren liegen die Verluste unterhalb von 10% der übertragenen Wirkleistung $P_{W,2}$. Der Verlauf der primären Wirkleistung als Funktion der Belastung ist daher ähnlich wie der der sekundären Wirkleistung; sie bleibt aber im Gegensatz zu dieser im Kurzschluss endlich.

Zeigerdiagramme zum Transformator

Zum Zeichnen von Zeigerdiagrammen (s. Anhang A4) für einen verlustfreien Transformator ($R_V = 0$), der mit einem reinen Wirkwiderstand belastet ist ($X = 0, Z = R$), wird hier eine Konstruktionsvorschrift angegeben (s. Abb. 238.4).

Beginnen Sie entsprechend der Maschenregel (Schaltung siehe Abb. 238.3) $RI_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 = 0$. Zeichnen Sie einen Pfeil für RI_2, senkrecht dazu einen Pfeil für $i\omega L_2 I_2$ (Längenverhältnis = $\omega L_2/R$). Schließen Sie das Dreieck für den Sekundärkreis durch einen Pfeil für $i\omega M I_1$. Zeichnen Sie jetzt die Primärkreismasche $U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2$. Zeichnen Sie $i\omega L_1 I_1$ parallel zu $i\omega M I_1$ (Längenverhältnis = L_1/M). Zeichnen Sie $i\omega M I_2$ parallel zu $i\omega L_2 I_2$ (Längenverhältnis = M/L_2). Schließen Sie das Dreieck mit U_1. Kennzeichnen Sie die Phasenlagen von I_2 durch einen Pfeil parallel zu RI_2 und die Phasenlage von I_1 durch einen Pfeil senkrecht zu $i\omega M I_1$.

In Abb. 238.4 sind Zeigerdiagramme für einen Transformator bei variabler Last und konstanter Amplitude von U_1 gezeichnet. Der Zeitpunkt der „Momentaufnahmen“ der komplexen Zahlen für die Spannungen ist so gewählt, dass der Realteil von U_2 seinen Minimalwert hat. Der Streukoeffizient $\sigma = 0.1$ ist relativ groß, um die Effekte des Streuflusses noch sichtbar zu machen. Ist der Streukoeffizient $\sigma = 0$, so entstehen offenbar zwei ähnliche Dreiecke im Maßstabsverhältnis L_1/M, und U_2 wird parallel zu U_1.

Für $R \gg \omega L_2$ (Abb. 238.4(a)) ist U_2 nahezu in Phase mit U_1, I_1 ist um ca. 90° gegen U_1 phasenverschoben. Mit abnehmendem R (Abb. 238.4(b) und 238.4(c)) dreht I_1 in Gegenphase zu I_2. Gleichzeitig wächst der Phasenunterschied zwischen U_1 und U_2, wird für $R = \sigma\omega L_2$ ca. 45°, genauer $\tan\varphi = (1+\sigma)/(1-\sigma)$, und erreicht im Kurzschluss den Wert 90°.

238.2 Versuchsdurchführung

ADC/Cassy

Zur bequemen Datenaufnahme werden in diesem Versuch *parallel zu den Messinstrumenten* Analog/Digitalwandler (ADC) mit PC-Steuerung eingesetzt. Sowohl die primärseitigen als auch die sekundärseitigen Messgrößen werden über ADCs aufgenommen und am PC-Schirm angezeigt; sie stehen später in tabellarischer Form als ASCII-Datei zur Verfügung, die ausgedruckt oder auf einen mitgebrachten Datenträger kopiert werden kann.

Ein Analog/Digitalwandler (ADC = Analogue to Digital Converter) setzt eine analoge Eingangsspannung in einen digitalen Datenstrom um. Auf der Eingangsseite bestehen wie bei Messinstrumenten Beschränkungen bezüglich der verarbeitungsfähigen Amplitude und Frequenz. Die zu

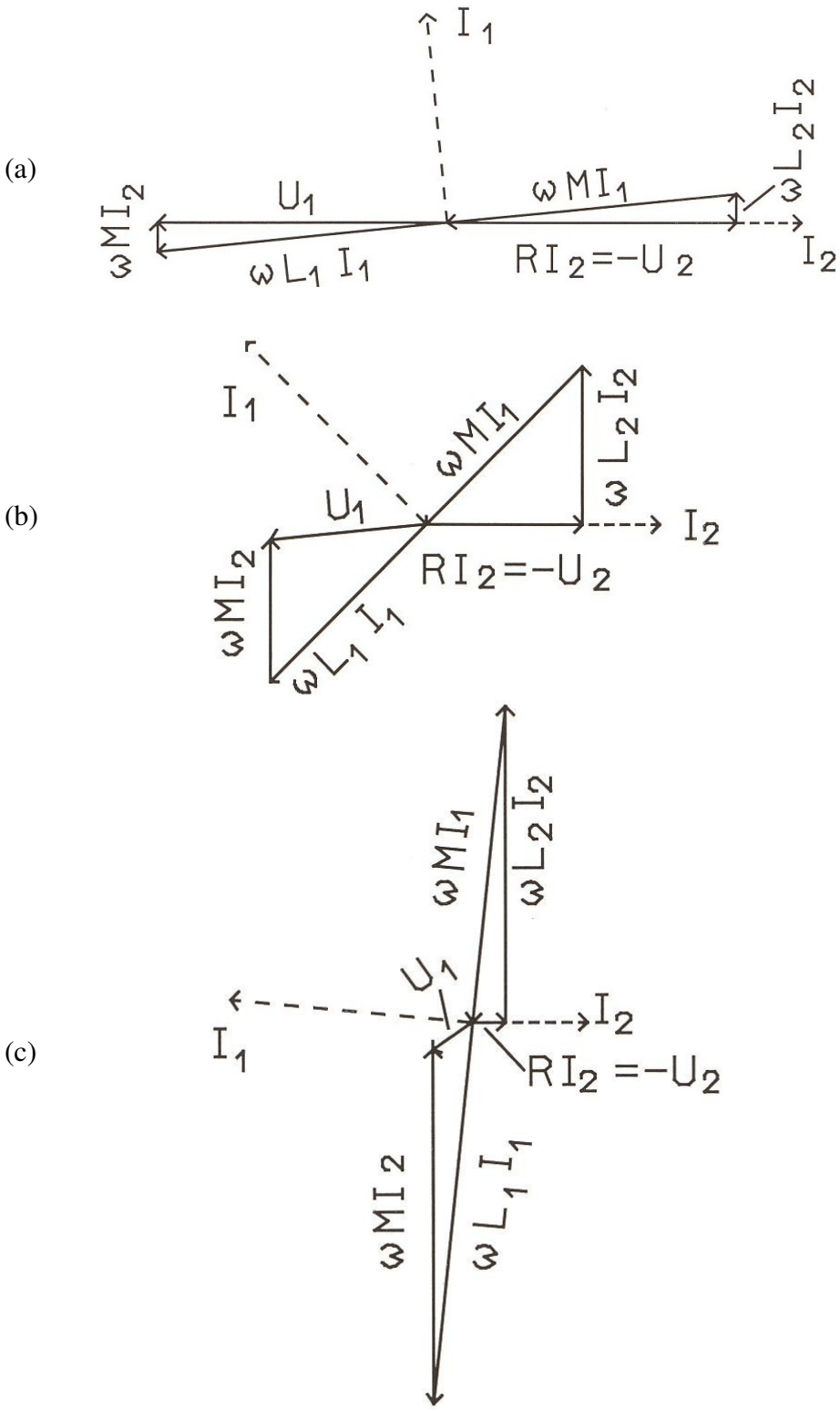


Abbildung 238.4: Zeigerdiagramme eines verlustfreien Transformators, der mit unterschiedlichen reinen Wirkwiderständen R belastet ist und mit konstanter Spannung U_1 angetrieben wird.

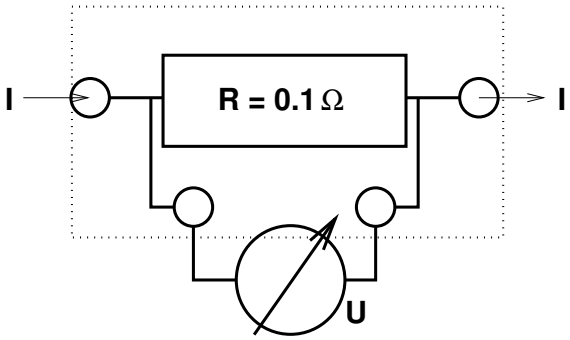


Abbildung 238.5:
Schaltbild für den externen Shunt.

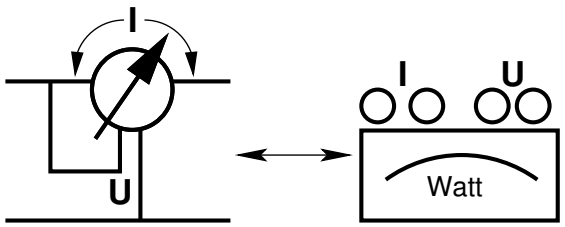


Abbildung 238.6:
Schaltsymbol für das Leistungsmessgerät

vermessenden Signale müssen unter Umständen an die verarbeitbaren Eingangssignale des ADC angepasst werden. Da z.B. Strom vom ADC nicht gewandelt wird, muss ein Strom erst in eine Spannung umgesetzt werden (Strom durch Widerstand geleitet ergibt nach dem Ohmschen Gesetz eine Spannung von $U = RI$). Ist die Signalamplitude größer als die erlaubte Eingangsamplitude, muss sie über eine Spannungsteilerschaltung kaskadiert werden. Bei zu geringer Signalamplitude können die Diskretisierungsschritte des ADC stören und es empfiehlt sich, das Signal vor dem ADC analog zu verstärken. Der digitale Signalstrom vom ADC wird über ein Interface in einen Rechner übermittelt. Die dortige Software kann den Datenstrom dekodieren, in physikalisch sinnvolle Größen umrechnen, diese darstellen, weitere Größen rechnerisch ableiten und gegebenenfalls den Messvorgang steuern (= Instrumente ablesen). Wenn die Vorschaltgeräte Teil des „Baukastensystems“ sind, dann kann das Mess- und Steuerprogramm die Auswirkungen der Vorschaltgeräte berücksichtigen. Im Praktikum wird das kommerzielle System CASSY von Leybold-Didactic eingesetzt (siehe Anhang A3.1 der Anleitung). Nach dem Booten des PC starten Sie die CASSY-Software mit der Verknüpfung auf dem Desktop.

Die Messung von Spannung U und Strom I wird durch die ADC vorgenommen. Die ADCs werden parallel zu den analogen Messinstrumenten sowohl bei dem zu vermessenden Widerstand (Abb. 238.8) als auch beim Transformator (Abb. 238.9) eingebunden. Das Steuer- und Aufnahmeprogramm im PC berechnet die Leistung.

Analoge Messung hoher Ströme

Wenn Ströme gemessen werden sollen, die die Maximalwerte der Messwerke von analogen oder digitalen Multimetern überschreiten, dann wird der Strom aufgeteilt in einen kleineren Teil, der durch das Messwerk fließt, und einen größeren Teil, der am Messwerk vorbei fließt. Im dazu eingesetzten Parallelwiderstand (Shunt) führt die Leistung $P = UI = RI^2$ zur Erwärmung des Widerstands. Bei genügend hohen Strömen dabei wird häufig die Belastungsgrenze der Widerstände überschritten und damit der Zeitraum für den Messvorgang begrenzt (sonst wird der Widerstand zu heiß und „schmilzt“ oder „verbrennt“). Die maximale Messzeit (= Belastungszeit) ist auf den Hochstromeingängen der Multimeter angegeben. Um das Problem bei diesem Versuch zu umgehen, wird mit einem hochbelastbaren externen Shunt gearbeitet, der wie in Abb. 238.5 zu schalten ist.

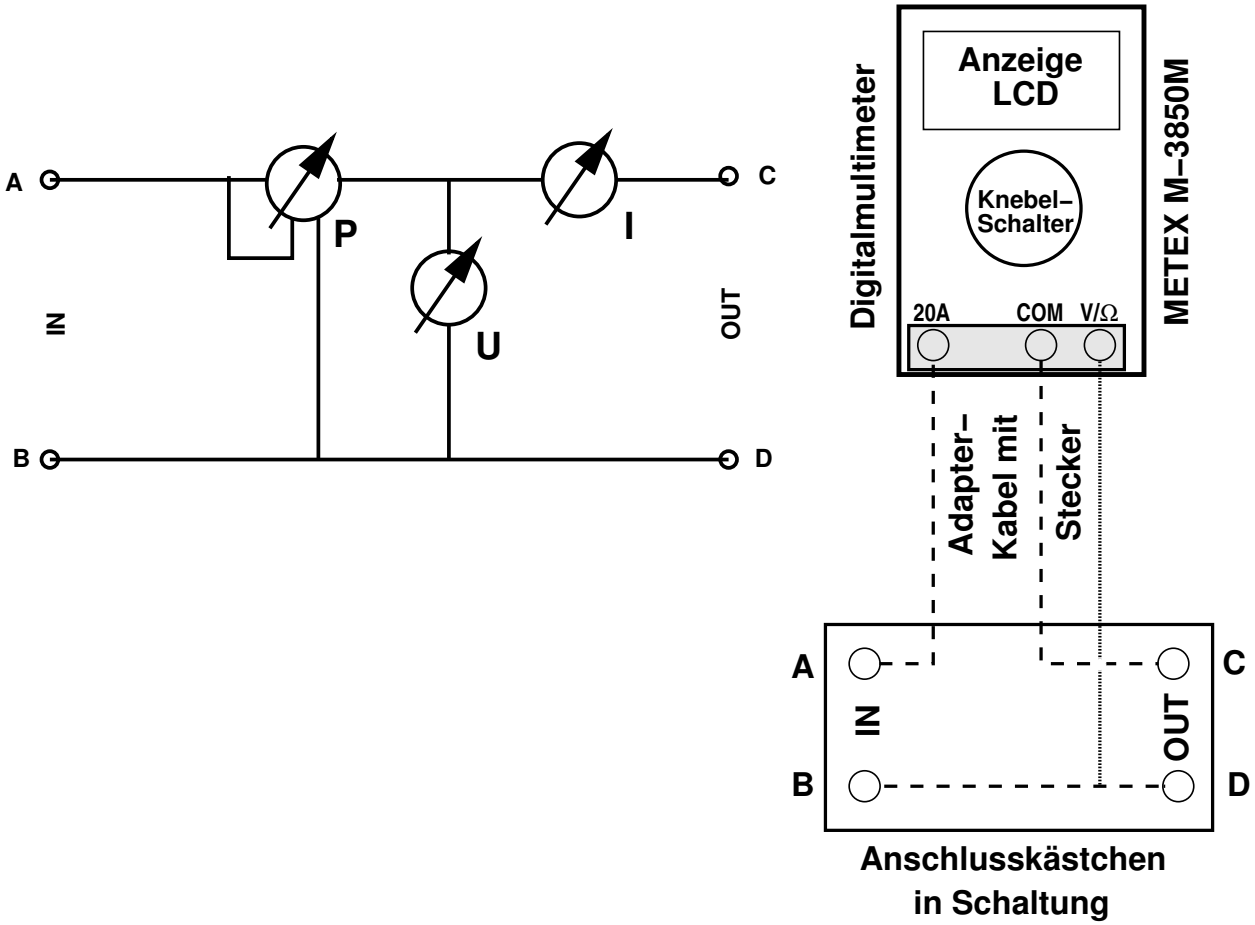


Abbildung 238.7: Schaltbild zur gleichzeitigen Messung von Leistung, Spannung und Strom mit 3 analogen Messgeräten (links) sowie mit einem DMM (rechts).

Analoge Messung von Leistung

Zur analogen Messung von elektrischer Leistung wird der Permanentmagnet eines Drehspulinstrumentes durch einen Elektromagneten ersetzt. Der Strom (oder eine Teil davon) wird durch den Elektromagneten geleitet und die Spannung (oder Teil davon) an die Messspule gelegt. Der Ausschlag wird so proportional zu dem Produkt von Strom und Spannung. Ein Leistungmessgerät hat daher 4 Eingangsbuchsen, von denen zwei extern verbunden werden (siehe Abb. 238.6).

Digitale Messung von Leistung, Spannung und Strom

Zur gleichzeitigen Messung von Leistung, Spannung und Strom braucht man 3 analoge Messgeräte, die wie in Abb. 238.7 (links) gezeigt zu schalten sind. Diese Schaltungsgruppe wird mehrfach in diesem Versuch benötigt. Wir ersetzen in den folgenden Schaltungen diese 3 analogen Messgeräte durch ein Digitales Multimeter (DMM; Firma Metex; Modell M-3850M) wie in Abb. 238.7 (rechts) dargestellt. Bei richtiger Beschaltung werden alle 3 Parameter Leistung, Spannung und Strom auf der LCD-Anzeige darstellt. Der Knebelschalter des DMM ist auf „POWER“ zu stellen.

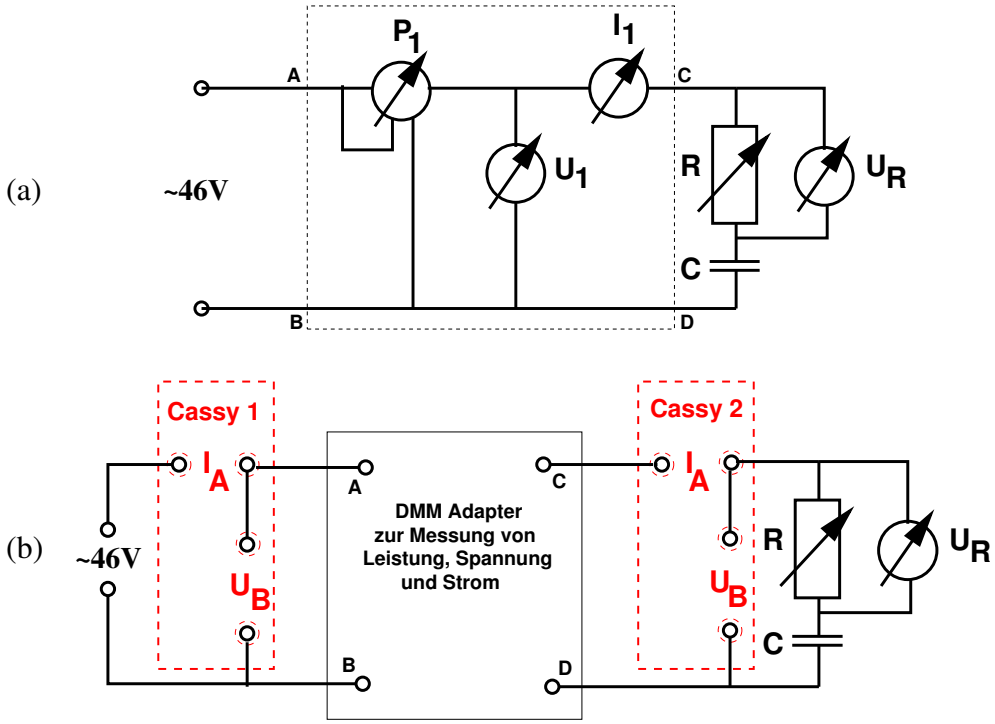


Abbildung 238.8: Schaltung Vorversuch (a) ohne ADC mit Analogmessgeräten, (b) mit ADC und Adapterbox zur Direktmessung mit DMM. Zur Versuchsdurchführung soll die Schaltungsvariante (b) benutzt werden.

238.2.1 Vorversuch: Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Aufgabe 238.a: *Messen Sie für eine RC-Serienschaltung (Abb. 238.8(b) bei festem Kondensator C für ca. 10 verschiedene Widerstandswerte R die Größen Spannung U, Strom I, Wirkleistung P_W und die Spannung U_R über dem Widerstand. Überzeugen Sie sich von der Übereinstimmung der von den Instrumenten abgelesenen und den vom PC angezeigten Werte.*
50 Hz-Spannungsquelle $U_{eff} \approx 47\,\mathrm{V}$; verschiedene Schiebewiderstände (R_{max} ca. 600 Ω, ca. 60 Ω, ...); Kondensator ca. 80 µF.

Aufgabe 238.A: *Wie groß muss die zulässige Stromstärke des Schiebewiderstandes sein? Warum darf man hier keine „Elkos“[1] als Kondensator benutzen? Schaltungsskizze in das Protokoll!*

Aufgabe 238.b: *Auswertung: Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für diese Schaltung. Berechnen Sie P_S und $\cos(\varphi)$ (φ = Phasenwinkel); tragen Sie P_W, P_S und $P_S \cos(\varphi)$ gegen R ($R = U_R/I$, $P_S = UI$, $\cos(\varphi) = U_R/U$) auf.*

Berechnen Sie die maximale Leistung $P_{W,max}$, die die Schaltung der Spannungsquelle entnehmen kann, und den entsprechenden Widerstand. Tragen Sie diese Werte in die nachfolgende grafische Darstellung ein.

[1] Elko = Elektrolyt Kondensator. Elkos haben eine sehr hohe Kapazität pro Bauvolumen. Elkos sind empfindlich auf die richtige Polung der Betriebsspannung. Fehlpolung führt zur Zerstörung des Dielektrikums, damit des Kondensators; u.U. kann der Kondensator explodieren oder in Brand geraten.

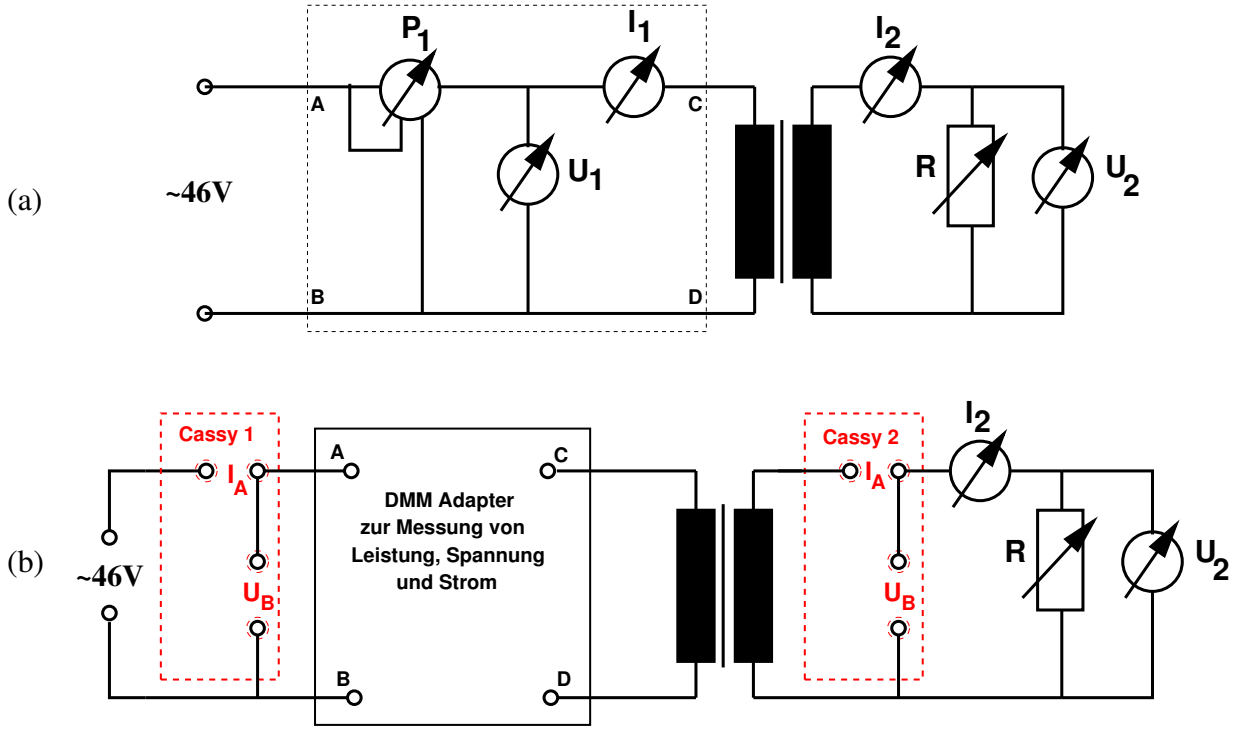


Abbildung 238.9: Schaltung Transformatorversuch: (a) ohne ADC mit Analogmessgeräten, (b) mit ADC und Adapterbox zur Direktmessung mit DMM. Zur Versuchsdurchführung soll die Schaltungsvariante (b) benutzt werden.

238.2.2 Messungen am Transformator

Aufgabe 238.c: *Schaltung:*

Auf beiden Spulenkörpern des Trafos befinden sich je zwei Wicklungen (s. Abb. 238.9). Schalten Sie die Wicklungen so in Serie, dass ein 1:1-Trenntrafo ($U_1/U_2 = 1$ im Leerlauf) entsteht. Messen Sie die primäre Wirkleistung $P_{W,1}$, ferner I_2, I_1, U_2 und U_1. Beginnen Sie mit dem Leerlauffall ($I_2 = 0$), erhöhen Sie I_2 in Schritten von 0,1 A bis $I_2 = 0{,}5$ A, danach in Schritten von 0,2 A bis in Nähe des Kurzschlussstromes, dann wieder in kleinen Schritten. Hierzu sind verschiedene Schiebewiderstände zu benutzen.

Hinweis: Der auf einem Widerstand vermerkte maximal zulässige Strom darf keinesfalls überschritten werden!

Aufgabe 238.d: *Tabelle und Diagramm:*

Legen Sie vor Versuchsbeginn eine Tabelle an – oder verwenden Sie den Dateiausdruck – für alle Messgrößen und für die durch Auswertung zu bestimmenden Größen (P_V = Verlustleistung):

$$
\begin{aligned}
P_{S,2} &= U_2 I_2 & P_V &= P_{W,1} - P_{W,2} \\
P_{Cu} &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 & P_{Fe} &= P_V - P_{Cu} \\
\eta &= P_{W,2}/P_{W,1} & P_{S,1} &= U_1 I_1
\end{aligned}
$$

Für die folgende Auswertung beachten Sie: *Die in der Auswertungsanleitung angegebenen quantitativen Beziehungen sind teilweise angemessene Näherungen. Für genauere quantitative Zusammenhänge siehe Abschnitt 238.1.*

Füllen Sie die angefangene Tabelle vollständig aus (Berechnung von $P_{S,2}$, etc.).

Tragen Sie die beiden Wirkleistungen $P_{W,1}$ und $P_{W,2}$, die Verlustleistungen $P_{V,\,Cu}$, P_{Fe} sowie den Wirkungsgrad η gegen I_2 auf.

Aufgabe 238.e: *Selbstinduktion:*

Bestimmen Sie ωL aus dem gemessenen Betrag der Eingangsimpedanz im Leerlauf ($\omega L = U_1/I_1$ für $R = \infty$).

Man kann ωL auch folgendermaßen bestimmen:

- *aus dem gemessenen Betrag der Eingangsimpedanz (falls $R = \omega L$ ist, gilt: $U_1/I_1 = R/\sqrt{2}$),*
- *aus der gemessenen Stromübertragung ($I_2/I_1 = 1/\sqrt{2} \rightarrow R + R_V = \omega L$).*

Aufgabe 238.f: *Streukoeffizient:*

Bestimmen Sie $\sigma = 1 - M^2/L^2$:

- *aus der gemessenen Stromübertragung im Kurzschlussfall ($I_2/I_1 = M/L = \sqrt{(1-\sigma)} \approx 1 - \sigma/2$),*
- *aus der gemessenen Spannungsübertragung im Leerlauf ($U_2/U_1 = M/L$),*
- *aus den gemessenen Beträgen der Eingangsimpedanzen für Kurzschluss und Leerlauf (Verhältnis $= \sigma$),*
- *aus dem gemessenen Kurzschlussstrom $I_{2,K}$ mit $I_{2,K}\sigma\omega L = U_1$; den Wert für ωL der Aufgabe 238.e entnehmen.*

Stellen Sie die verschiedenen experimentellen Werte für σ zusammen und diskutieren Sie die Fehler.

Aufgabe 238.g: *Spannungsübertragung:*

Tragen Sie die gemessenen Werte für die Spannungsübertragung U_2/U_1 gegen I_2 auf.

Berechnen Sie – mit den gemessenen Werten für M/L und ωL (siehe Aufgaben 238.e,f) und $R = U_2/I_2$ sowie den auf den Spulen angegebenen Werten für R_V – das Verhältnis U_2/U_1 und tragen Sie die berechneten Werte in das Diagramm ein.

Versuch 240

Hysterese der Magnetisierung von Eisen

Lernziel: Das Verhalten ferromagnetischer Stoffe im Magnetfeld soll untersucht werden. Die begriffliche Unterscheidung der Größen Magnetische Flussdichte, Magnetisches Feldstärke und Magnetisierung (von Materie) sowie Verfahren zu ihrer Messung sollen erlernt werden.

Kenntnisse: Kenngrößen[1] von Magnetfeldern: Magnetisches Flussdichte $\vec{B}$, Magnetische Feldstärke $\vec{H}$, Magnetischer Fluss Φ, Induktion, Magnetisierung $\vec{M}$; Materie im Magnetfeld: Suszeptibilität, Ursachen von Dia-, Para- und Ferromagnetismus; Makroskopische Effekte des Ferromagnetismus, Neukurve (jungfräuliche Kurve), Hystereseschleife, Sättigungsfeld, Remanenzfeld, Koerzitivfeld, magnetisch weich und hart, Permeabilität, atomphysikalische Deutung und Temperaturabhängigkeit; Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld, Halleffekt, Hallsonde; Maßeinheiten: Tesla, Gauß, Oersted.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Experimentalphysik;
Feynman, Lectures, Bd. 2, Kap ,34–37;
Demtröder, Experimentalphysik 2 (Elektrizität und Optik), Kap. 3;
Praktikumslehrbücher: Westphal, Geschke, Walcher
Weizel, Theoretische Physik I, Kap. C III, §15.

240.1 Erläuterungen

240.1.1 Zur Hysterese

Abb. 240.1 zeigt das magnetische Verhalten eines ferromagnetischen Stoffes, spez. Eisen. Wird das Eisen (längs der Neukurve) bis zur Sättigung und dann weiter zyklisch magnetisiert, so durchläuft $B = f(H)$ die äußere Hysteresekurve. Beginnt man die zyklische Magnetisierung schon, bevor die Sättigung erreicht ist, so ergibt sich eine solche innere Schleife. Aus diesen Kurven lassen sich die für das spezielle Eisen charakteristischen Größen gewinnen: die *Remanenz*, B_R, das *Koerzitivfeld*, H_K, sowie die *Anfangspermeabilität*, μ_A (Steigung der Neukurve im Nullpunkt), und die *maximale Permeabilität*, μ_max (Steigung der Tangente vom Nullpunkt an die Neukurve).

[1] In den Lehrbüchern herrscht eine gewisse „Beliebigkeit“ in der Namensgebung der Kenngrößen von Magnetfeldern, die sich z.T. aus der historischen Entwicklung verstehen lässt:
$\vec{B}$ = magnetische (Kraft-)Flussdichte: Magnetfeld, magnetische Feldstärke, magnetische Induktion
$\vec{H}$ = magnetische Feldstärke: Magnetfeld, magnetische Erregung
Englisch: magnetic flux density; magnetic field strength; magnetisation

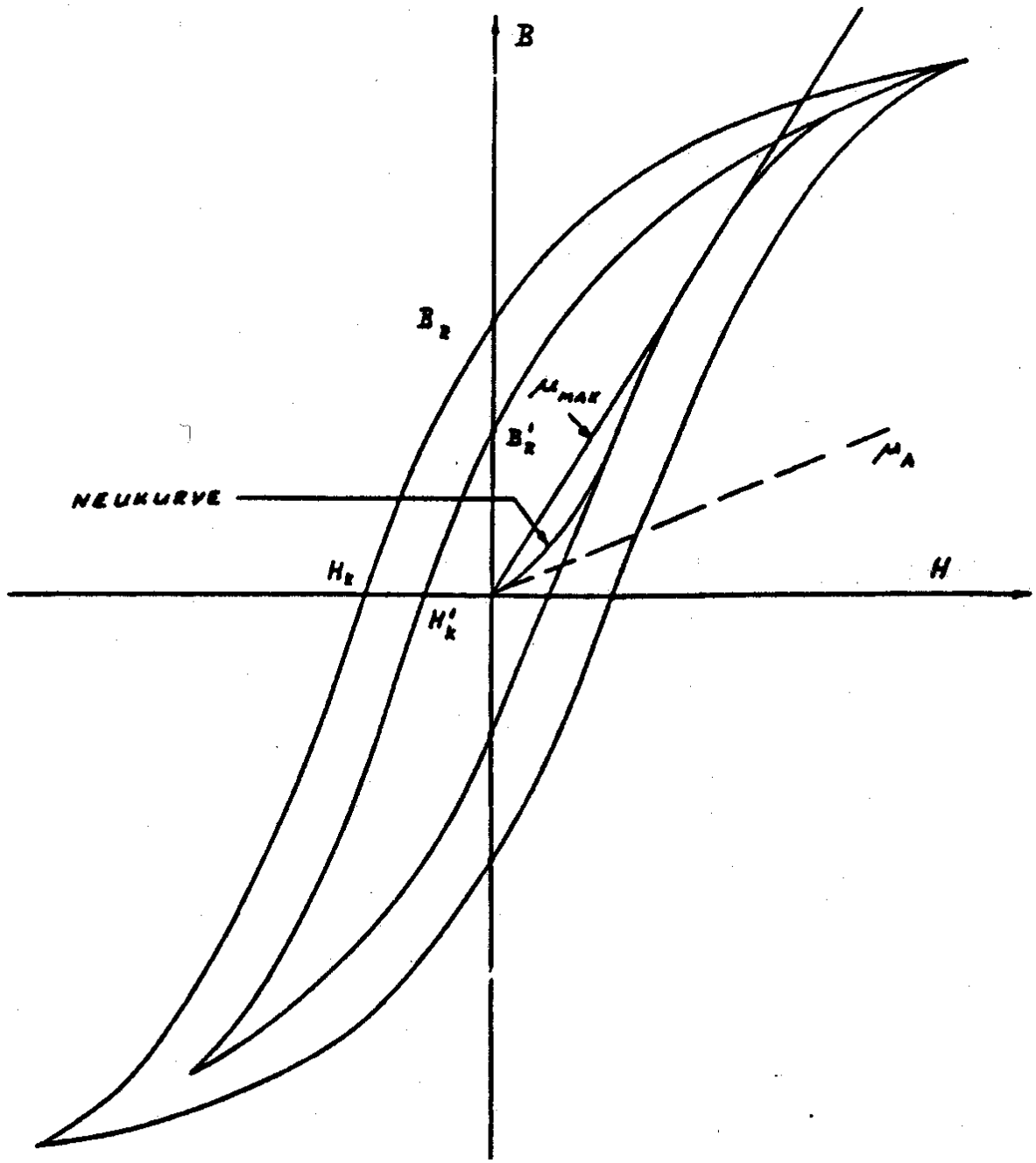


Abbildung 240.1: Hysteresekurve eines Ferromagneten mit Neukurve, Hystereschleife, anfängliche und maximale Permeabilität, Remanenz- und Koerzitivfeld.

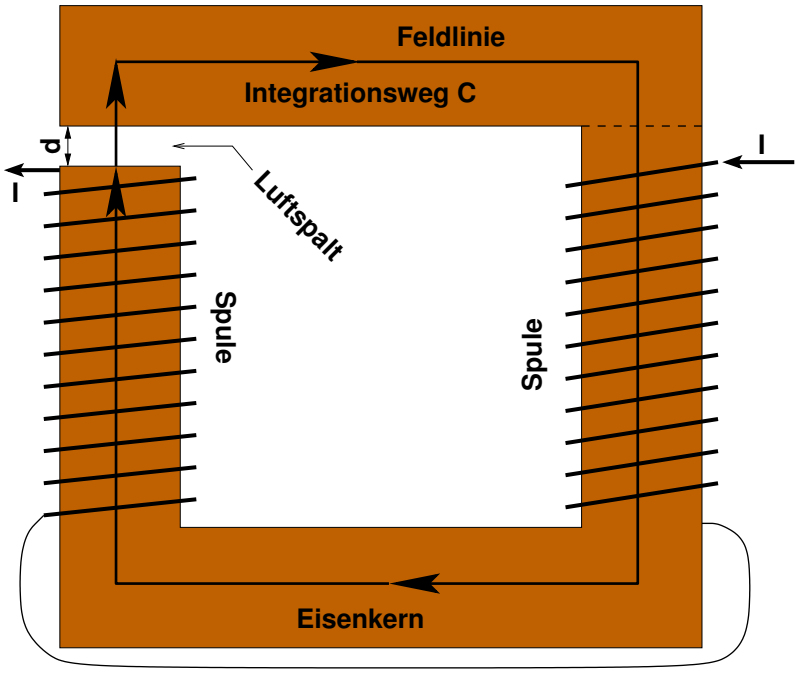


Abbildung 240.2: Eisenkern (Länge $l = (477 \pm 4)$ mm) mit zwei Spulen und einem Luftspalt (Breite $d = (2{,}00 \pm 0{,}05)$ mm).

Zur Bestimmung dieser Größen für Eisen dient hier ein Eisenkern (siehe Abb. 240.2), wie man ihn beim Transformator antrifft (Trafo-U mit Joch). Auf dem Kern sitzen zwei gleiche Spulen (je 500 Windungen, $R = 2{,}5\,\Omega$), die so von Strom durchflossen werden, dass die erzeugten Magnetfelder sich verstärken. Aus dem Eisenkern ist ein Luftspalt[2] ausgeschnitten, der über den gesamten Querschnitt des Eisenkerns geht. Die Schlitzweite d ist klein gegen die Querabmessungen des Eisenkerns. Damit ist gewährleistet, dass das Magnetfeld im Luftspalt homogen ist (d.h. der Streufluss ist vernachlässigbar).

Sind $\vec{H}_{\mathrm{Fe}}$, $\vec{H}_{\mathrm{L}}$ und $\vec{B}_{\mathrm{Fe}}$, $\vec{B}_{\mathrm{L}}$ die magnetischen Erregungen bzw. Feldstärken im Eisen und im Luftspalt und ist ℓ_{Fe} die mittlere Länge des Eisenringes (ohne Luftspalt), so gelten folgende Beziehungen:

$$\vec{B}_{\mathrm{Fe}} = \vec{B}_{\mathrm{L}} \quad \text{und} \quad \oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = H_{\mathrm{Fe}} \cdot \ell_{\mathrm{Fe}} + H_{\mathrm{L}} \cdot d = N \cdot I. \tag{240.1}$$

C ist irgendein geschlossener Integrationsweg, der alle Windungen einmal durchstößt. Hier sei es der Weg durch die Mitte des Eisenkerns und des Luftspaltes. Wegen $B_{\mathrm{Fe}} = B_{\mathrm{L}} = \mu_0 \cdot H_{\mathrm{L}}$ gilt

$$H_{\mathrm{Fe}} = \frac{N \cdot I}{\ell_{\mathrm{Fe}}} - \frac{d}{\mu_0 \cdot \ell_{\mathrm{Fe}}} \cdot B_{\mathrm{Fe}}. \tag{240.2}$$

$B_{\mathrm{Fe}} = B_{\mathrm{L}}$ wird im Luftspalt gemessen und daraus H_{Fe} berechnet.

[2] Als Luftspalt wird das Stück des Ringes bezeichnet, in dem ein unmagnetischer Stoff – wie Luft es ist – eingesetzt ist. Hier ist es der Kunststoff Trovidur. Dies geschieht aus mechanischen Gründen, um das nicht ganz U-förmige Trafoeisen mit dem Querjoch abschließen zu können.

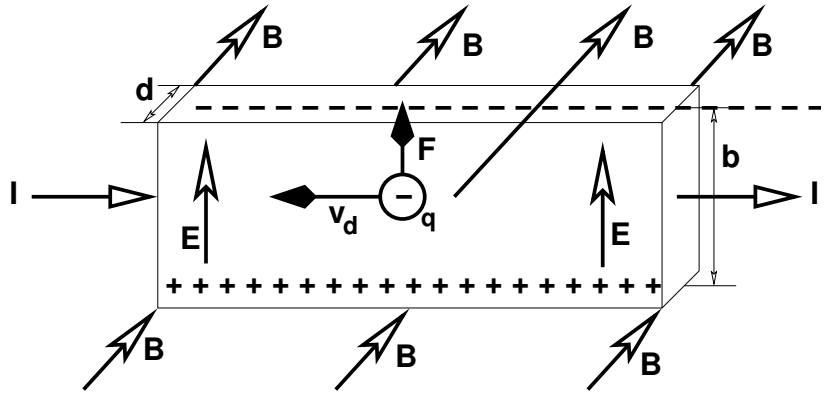


Abbildung 240.3: Halleffekt am Beispiel von negativen Ladungsträgern: Das Magnetfeld steht senkrecht auf dem Streifenleiter der Breite b und Dicke d. Der (technische) Strom I fließt von links nach rechts durch den Leiter. Am oberen und unteren Rand des Streifenleiters sammeln sich Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens und bauen ein elektrisches Feld E im Leiter auf.

240.1.2 Halleffekt und Hallsonde

Durch einen flachen, streifenförmigen Leiter, der senkrecht von einem Magnetfeld $\vec{B}$ durchsetzt wird, fließe ein Strom I senkrecht zum Magnetfeld (siehe Abb. 240.3). Auf die Ladungsträger q des Stroms wirkt die Lorentzkraft $\vec{F}$. Da alle Vektoren senkrecht aufeinander stehen, gilt für die Beträge:

$$F = q \cdot v_\mathrm{d} B, \tag{240.3}$$

wobei v_d die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger des Stroms im Leiter ist. Im Leiter werden die Ladungsträger auf gekrümmte Bahnen gezwungen. Wenn deren Krümmungsradius groß gegen die Abmessungen des Streifenleiters ist, dann sammeln sich Ladungsträger an einem Rand des Streifenleiters. Diese Ladungsträger fehlen am anderen Rand des Leiters, wo sich eine gleich große Sammlung von Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen aufbaut. Die so getrennten Ladungsträger erzeugen ein elektrisches Feld $\vec{E}$, dessen zugehörige Kraft der Lorentzkraft entgegen gerichtet ist. Die Potentialdifferenz, die sich zwischen den Rändern aufbaut, nennt man Hallspannung[3]. Bezeichnet man die Breite des Leiters mit b (siehe Abb. 240.3), so ergibt sich im Gleichgewicht der Kräfte eine Hallspannung

$$U_\mathrm{H} = Eb = v_\mathrm{d} B b. \tag{240.4}$$

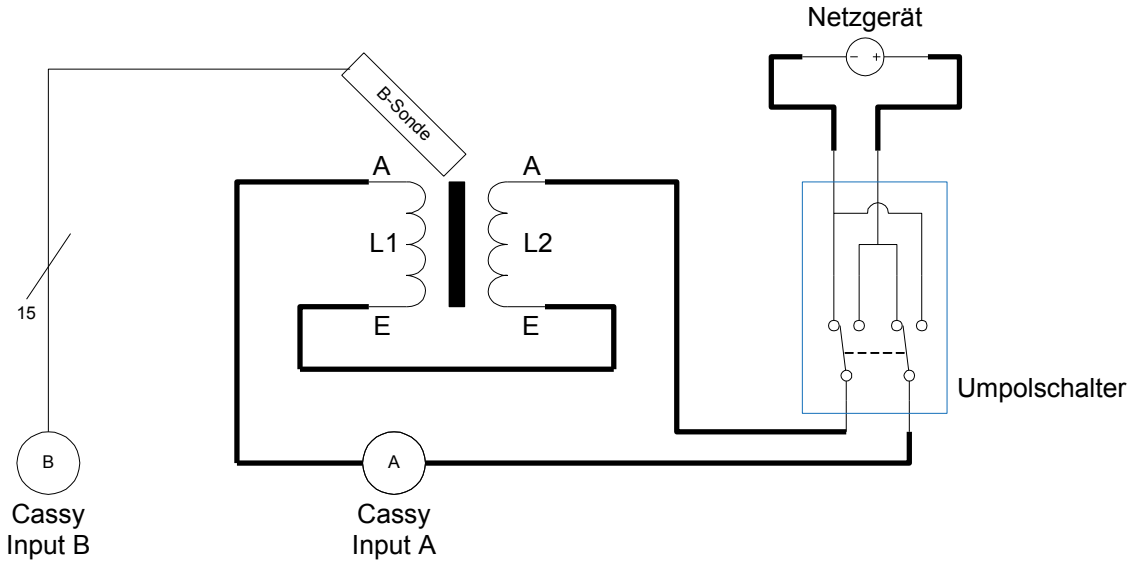
Der Strom I beträgt

$$I = n \cdot q \cdot v_\mathrm{d} A, \tag{240.5}$$

wobei n die Ladungsträgerdichte (Ladungen pro Volumen) im Leiter und $A = b \times d$ = Breite × Dicke seine Querschnittsfläche ist. I wird auch Steuerstrom genannt. Damit wird die Hallspannung (eliminiere v_d):

$$U_\mathrm{H} = \frac{IB}{nqd} = A_\mathrm{H} \frac{I}{d} B = S_\mathrm{H} B. \tag{240.6}$$

[3] E.H. Hall: On a New Action of the Magnet on Electric Currents. *American Journal of Mathematics 2*, 287-292 (1879)



Geräteliste:
Labornetzgerät ((0 – 16) V, (0 – 5) A
Umpolschalter (Kreuzschalter)
Sensor-Cassy USB zur Strommessung
Kombi B-Sonde für Cassy zur Messung des Magnetfelds
Eisenkern (Trafo-U-Eisen mit Joch und Spannvorrichtung)
2 Spulen mit je 500 Windungen und $R = 2{,}5\,\Omega$ in Reihe geschaltet
6 PVC-Messleitungen (⌀ 4 mm)

Abbildung 240.4: Beschaltung des Hystereseversuchs. Information zur Datenaufnahme mit dem Cassy System in Anhang A3.1.

Die Hallkonstante A_H charakterisiert die Eigenschaften des Leitermaterials. Halbleiter haben niedrige Ladungsträgerdichten n und damit (relativ) hohe Hallspannungen, die dann (relativ einfach) messbar werden. Häufig werden GaAs und InSb eingesetzt. Halbleiter weisen generell eine Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte auf, deren Stärke den erlaubten Bereich der Umgebungstemperatur einschränkt. Bei der Umsetzung des Prinzips in praktisch nutzbare Geräte treten weitere Effekte („Fertigungstoleranzen“) auf, die z.T. mit speziellen Schaltungen[4] umgangen werden können. Damit muss die Sondenempfindlichkeit S_H geeicht werden.

240.2 Versuchsanordnung

Abb. 240.4 zeigt die elektrische Schaltung des Versuchsaufbaus und listet die benutzten Geräte auf. Die Kombi B-Sonde enthält zwei Hallsonden aus GaAs mit eine Fläche von je $0{,}2\,\text{mm} \times 0{,}2\,\text{mm}$. Die Flächen sind so angeordnet, dass mit einer der Sonden das Magnetfeld senkrecht zur Träge-

[4] L. J. van der Pauw, *Philips Research Reports 13*, 1-9 (1958)

rachse (tangentiale Sonde) und mit der anderen das Feld parallel zur Trägerachse (axiale Sonde) nachgewiesen wird. Die Sonden sind linear im Messbereich (0 – 1000) mT und können bis 2 T messen, was jedoch eine detaillierte Eichung des nichtlinearen Bereichs oberhalb 1 T erfordert. Die relative Genauigkeit beträgt 3% bei einer Sondentemperatur von 20 °C.

240.3 Versuchsdurchführung

Achtung: Gefahr eines mechanischen Bruchs des Hallsondenträgers. Vorsichtig handhaben!

Nach dem Einschalten des Rechners wird das Betriebssystem Windows gestartet. Das System ist so konfiguriert, dass der PC nach jedem Reboot wieder in seinen Ursprungszustand zurückgesetzt wird. Außerdem können Daten ausschließlich auf einem USB-Stick gespeichert werden. Bitte bringen Sie daher zum Versuch einen USB-Stick mit. Nachdem das Betriebssystem Windows fertig geladen ist, startet man mit dem Icon Hysterese das Aufnahmeprogramm (Cassy).

Aufgabe 240.a: **Entmagnetisierung:** *Der Eisenkern zeigt im Allgemeinen eine Restmagnetisierung. Diese muss vor dem eigentlichen Versuch beseitigt werden. Dazu schließt man die Magnetspulen an einen Regeltrafo (Wechselspannung $U = (0 - 260)$ V) an und fährt den Ausgangsstrom* **kurzzeitig** *von 0 A bis 4 A hoch und* **gleich** *wieder zurück auf 0 A. (Vorsicht: Oberhalb von 4 A spricht die Sicherung an.)*

Frage: *Brauchen Sie den Umschalter bei der Entmagnetisierung? Warum?*

Auf diese Weise wird der Eisenkern bis in die Sättigung gebracht, er durchläuft die größtmögliche Hysteresekurve. Bei der dann folgenden Abnahme der Amplitude des erregenden Stromes (Abnahme der H-Amplitude) ziehen sich die Schleifen auf den Nullpunkt zusammen. Anschließend muss eine Kontrollmessung mit der Hallsonde durchgeführt werden.

Aufgabe 240.b: **B-Messung:** *Mit der Schaltung in Abb. 240.4 wird $\vec{B}$ im Luftspalt des Eisenkern als Funktion des erregenden Stromes I gemessen, d.h. Neukurve messen bis zum maximal erreichbaren I, Hysteresekurve durchmessen. Die Ströme sind so zu wählen, dass weder das Magnetfeld $|\vec{B}|$ im Luftspalt 1 T, noch der Strom $|I|$ durch die Spulen 3 A überschreiten (Messbereich des Cassy-Systems).*

Aufgabe 240.c: **Auswertung:** *Es ist das wahre H [A/m] im Eisen aus B und I zu berechnen. In einem Diagramm ist B gegen H aufzutragen. Aus dem Diagramm sind μ_A und μ_{max} in Maßeinheiten von μ_0 zu bestimmen.*

Bemerkung: *H_{Fe} ergibt sich hier als Differenz zweier ungefähr gleicher Grössen. Die Messungen müssen daher sehr sorgfältig durchgeführt werden. Sonst erhält man statt der Hysteresekurve einen* Fleischerhaken.

Versuch 242

Elektrische und magnetische Krafteinwirkung auf geladene Teilchen

Lernziele: Ein Magnetfeld übt auf eine bewegte Ladung eine Kraft aus, sei es ein geladenes Einzelteilchen oder eine geordnete Bewegung vieler Ladungsträger wie z.B. ein Elektronenstrahl oder ein Strom in einem Leiter. Ein elektrisches Feld übt eine Kraft auf eine Ladung aus, egal ob diese stationär ist oder sich bewegt. Die Kraft auf eine Probeladung dient zum Nachweis eines elektrischen Feldes.

Im ersten Versuchsteil wird mit einem Fadenstrahlrohr das Verhalten eines Elektronenstrahls in einem transversalen, homogenen Magnetfeld demonstriert: der Weg des Elektronenstrahles wird durch das Rekombinationsleuchten ionisierter Gasatome sichtbar. Diese Versuchsanordnung ermöglicht die Bestimmung des Wertes der spezifischen Ladung e/m für langsam bewegte Elektronen.

Im zweiten Versuchsteil wird die elektrische Kraftwirkung auf geladene Öltröpfchen nach Millikan gemessen. Damit kann die Größe e der Elementarladung bestimmt werden. Aus e/m und e folgt die Masse des Elektrons.

Kenntnisse: Elementarladung; Lorentz-Kraft; Bewegung von Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern; Erzeugung von Elektronenstrahlen; Biot-Savartsches Gesetz; Magnetfeld von Helmholtz-Spulen; Unterscheidung von magnetischer Flussdichte „$\vec{B}$-Feld“, und magnetischer Feldstärke „$\vec{H}$-Feld“ (siehe z.B. Demtröder Bd. 2, Kap. 3.1); physikalische Maßeinheiten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ im SI- bzw. CGS-System; Umrechnung zwischen den Systemen; Viskosität; Stokessche Reibung; Cunningham-Korrektur; freie Weglänge; Auftrieb.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Experimentalphysik;
Praktikumslehrbücher: Walcher, Geschke

Geräte: Es werden Fadenstrahlrohre der Firma LD Didactic eingesetzt.
Millikanapparatur der Firma Pasco.
Stabilisierte Netzgeräte mit Spannungsanzeige.

242.1 Spezifische Ladung e/m des Elektrons

242.1.1 Erläuterungen e/m

Prinzip des Fadenstrahlrohrs

Das Fadenstrahlrohr funktioniert folgendermaßen: Aus einem Strahlerzeugungssystem („Elektronenkanone“) bestehend aus Glühkathode, Wehnelt-Zylinder und Anode, tritt ein Elektronenbündel in einen Raum aus, in dem sich Wasserstoff unter einem Druck der Größenordnung (10^{-2} – 10^{-3}) mbar befindet. Die Elektronen stoßen mit Gasmolekülen zusammen und ionisieren sie, so dass der Weg des Elektronenbündels durch leuchtende Gasatome (Rekombination) sichtbar gemacht ist. Die beim Stoß erzeugten Sekundärelektronen fliegen aus dem Strahl heraus, während die trägen positiven Ionen zurückbleiben und wegen ihrer großen Anzahl und ihrer geringen Geschwindigkeit eine starke positive Raumladung bilden. Unter der Wirkung dieser Raumladung werden auf die Elektronen des aus dem Strahlerzeugungssystem austretenden Bündels radial zur Strahlachse Kräfte ausgeübt, die eine Fokussierung des Elektronenbündels zur Folge haben. Es bildet sich ein „Knotenstrahl“ oder, unter gewissen Bedingungen, ein fadenförmiger Elektronenstrahl („Fadenstrahl“) aus, der ohne weitere elektronenoptische Hilfsmittel das Entladungsrohr durchläuft.

Bestimmung der spezifischen Ladung e/m des Elektrons

Auf die Elektronen des Strahles wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{242.1}$$

wobei e die Ladung des Elektrons, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons und $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte ist. Orientiert man das Fadenstrahlrohr im Magnetfeld der Helmholtz-Spulen so, dass der Fadenstrahl die Elektronenkanone senkrecht zur Magnetfeldrichtung verlässt, erhält man als Betrag der Kraft $F = evB$.

Unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft wird der Fadenstrahl zu einem Kreisbogen verformt und bei hinreichend starkem Magnetfeld zu einem Vollkreis mit dem Radius r gebogen. Die auf die Elektronen wirkende Lorentz-Kraft F ist dann betragsmäßig gleich der Zentripetalkraft mv^2/r:

$$e \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}. \tag{242.2}$$

Die Geschwindigkeit der Elektronen folgt aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \tag{242.3}$$

wobei U die gesamte (Beschleunigung-)Spannung ist, die zwischen Glühkathode und Anode anliegt. Aus Gleichungen 242.2 und 242.3 folgt unmittelbar für die spezifische Ladung des Elektrons

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2B^2}. \tag{242.4}$$

Alle Größen auf der rechten Seite von Gleichung 242.4 werden gemessen. Misst man U in Volt, r in Meter und B in Tesla, so erhält man e/m in Maßeinheiten von As/kg.

Bestimmung der magnetischen Flussdichte im Zentrum der Helmholtz-Spulen

Die Anordnung nach Helmholtz zur Erzeugung homogener Magnetfelder besteht aus zwei einzelnen kreisförmigen Leitern mit gleichen Radien, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Achse im Abstand ihrer Radien liegen. Die beiden Leiter werden so beschaltet, dass sie von demselben Strom durchflossen werden. Verwendet man statt Einzelleiter Spulen mit größerem Querschnitt, so sind die Abweichungen von der Homogenität klein, wenn man gewisse Bedingungen hinsichtlich des Querschnittes der Spulen beachtet und den Abstand von Spulenmitte zu Spulenmitte gleich dem mittleren Spulenradius macht. Die magnetische Flussdichte im inneren Bereich eines solchen Helmholtz-Spulen-Systems wird mit dem Biot-Savartschen Gesetz berechnet zu

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 \frac{n \cdot I}{R} = 0,716 \cdot \mu_0 \frac{n \cdot I}{R}. \tag{242.5}$$

Dabei sind R der mittlere Spulenradius bzw. der Spulenabstand, n die Windungszahl einer Spule und I die Stromstärke, die durch die Spulen fließt. Misst man R in m und I in A, so ergibt sich B in Tesla; für μ_0 ist dabei der Wert $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am) = $1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Vs/(Am) einzusetzen.

242.1.2 Versuchsdurchführung e/m

Das Fadenstrahlrohr (Abb. 242.1) besteht aus einem kugelförmigen Glaskolben mit einem Durchmesser von 160 mm und zwei an gegenüberliegenden Stellen eingeschmolzenen Rohrstutzen. In einem dieser Rohrstutzen sind die Halterungen und Zuführungen für das Strahlerzeugungssystem eingeschmolzen, welches sich im Innern des Kolbens befindet. Die Füllung besteht aus Wasserstoff mit einem Druck von ca. 1 Pa.

Das Fadenstrahlrohr ist in einer Halterung so fixiert, dass die Elektronen senkrecht ins Magnetfeld des – ebenfalls in dieser Haltung montierten – Helmholtzspulenpaares eingeschossen werden. Wenn die Elektronen nicht senkrecht eingeschossen werden, erhält man anstatt einer Kreisbahn einen Schraubenbahn. **Wenn dies der Fall sein sollte, geben Sie bitte Ihrem Assistenten Bescheid, der den Aufbau dahingehend für Sie justiert.** In der Halterung befinden sich die Anschlussbuchsen für das Strahlerzeugungssystem und die Helmholtzspulen mit einem aufgedruckten Schaltschema. Der gesamte Aufbau steht auf einem Drehteller.

Inbetriebnahme und Ausführung von Messungen

Schließen Sie jetzt gemäß des aufgedruckten Schaltschemas das Fadenstrahlrohr an das (gelbe) Röhrennetzgerät an. **Lassen Sie Ihre Verkabelung vor Inbetriebnahme vom Assistenten kontrollieren!** Die Heizspannung (6,3 V ~) wird fest gewählt, während die an das Strahlerzeugungssystem angelegte Beschleunigungsspannung mit Hilfe der im Netzanschlussgerät eingebauten Potentiometer eingestellt werden kann. Mit Hilfe der Spannung am sog. Wehneltzylinder kann der Elektronenstrahl fokussiert werden.

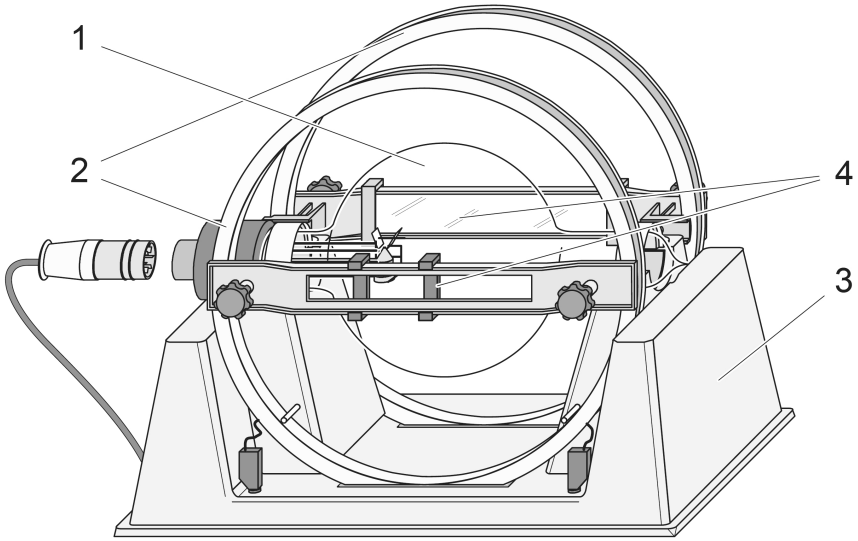


Abbildung 242.1: Fadenstrahlrohr (1) der Firma LD Didactic mit Messvorrichtung (4), die auf einem Ständer (3) mit Helmholtz-Spulen (2) montiert sind.

Die Helmholtz-Spulen mit einem Radius und einem Abstand von 150 mm haben jeweils 130 Windungen pro Spule. Schließen Sie diese an das (schwarze) Netzgerät zur Stromversorgung an. Die Spulen dürfen mit einem maximalen Strom von 2 A (kurzzeitig 2,5 A) betrieben werden.

Vor der Inbetriebnahme des Fadenstrahlrohres überzeugt man sich davon, dass die beiden Potentiometer für Anodenspannung und Wehnelt-Spannung auf Null stehen. Durch diese Maßnahme vermeidet man, dass beim Einschalten der Heizspannung an Gitter oder Anode des Strahlerzeugungssystems Spannung liegt. Man schließt auf diese Weise mit Sicherheit eine eventuelle Beschädigung der Kathodenschicht während des Anheizvorganges aus.

Erst nach einer Anheizzeit von ca. 3 Minuten betätigt man die beiden Potentiometer und beobachtet nun im gut abgedunkelten Raum das Auftreten des Fadenstrahls. Während man mit dem Potentiometer (0 – 250) V die Höhe der Anodenspannung wählt, lässt sich mit Hilfe des Potentiometers (−20 – 20) V die Wehnelt-Spannung geeignet einstellen und damit Schärfe und Helligkeit des Fadenstrahls. Am Einfachsten stellt man die Fokussierung ohne angelegtes Magnetfeld ein, so dass der Elektronenstrahl auf den Glaskolben trifft und dabei das Strahlprofil leicht erkennbar ist.

Wird zwischen den einzelnen Messungen der Elektronenstrahl nicht benötigt, stellen Sie beide Potentiometer wieder auf Null. Durch diese Maßnahme wird die Lebensdauer des Fadenstrahlrohres erheblich verlängert.

Aufgabe 242.a: *Experimentelle Bestimmung der spezifischen Ladung:*

1. *Nach der Anheizzeit (3 Minuten) stellt man den Fadenstrahl geeignet ein und wählt dabei eine bestimmte Beschleunigungsspannung U.*
2. *Danach schaltet man den Strom durch die Helmholtz-Spulen ein und beobachtet, wie der Fadenstrahl unter der Wirkung des homogenen Magnetfeldes eine Kreisbahn beschreibt.*

Zur Bestimmung des Kreisdurchmessers gibt es eine Messvorrichtung bestehend aus einem Lineal mit zwei Schiebern und einem Spiegel zum parallaxefreien Ablesen. Verschieben Sie beim Messen den linken Schieber so, dass Innenkante, Spiegelbild und Austrittsöffnung des Elektronenstrahls auf einer Linie liegen. Den rechten Schieber verschieben Sie bis Innenkante, Spiegelbild und Fadenstrahl ebenfalls auf einer Linie liegen und lesen nun den Durchmesser als Differenz am Lineal ab.

3. *Man liest nun den bei der Beschleunigungsspannung U zur Erzeugung eines Vollkreises mit dem Radius r erforderlichen Spulenstrom I am Amperemeter ab.*
4. *Um die Wirkung des magnetischen Erdfeldes (und anderer ortsfester Störfelder) eliminieren zu können, wird – bei konstant zu haltendem Kreisradius – das Fadenstrahlrohr auf dem Drehteller horizontal um 180° gedreht und dabei der Spulenstrom I so nachgestellt, dass die Elektronen sich wieder auf einer Kreisbahn mit identischem Radius bewegen.*
5. *Mit geänderten Wertepaaren U und I, d.h. unterschiedlichen Kreisradien, wird dieser Messvorgang 10 Mal wiederholt.*

Auswertung

Aufgabe 242.b:

1. *Erweitern Sie Gleichung 242.1 um einen Zusatzterm für eine störende magnetische Flussdichte B_E. (B_S sei das durch die Spulen erzeugte Feld, B_E die Komponente des Erdmagnetfeldes in Richtung von B_S).*
2. *Eliminieren Sie B_E mit den Messungen in beiden Orientierungen des Fadenstrahlrohrs und berechnen Sie B_S aus den Spulendaten und dem Strom I.*
3. *Stellen Sie die Messdaten in einem Diagramm U gegen $(rI)^2$ dar.*
4. *Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms e/m. Geben Sie e/m in C/kg an.*
5. *Berechnen Sie die Größe von B_E in Tesla.*

242.2 Elementarladung *e*

Die Ladung eines Elektrons, die Elementarladung, soll mit der Millikan[1]schen Öltröpfchen-Methode bestimmt werden. Millikan hat als Erster an einem Einzeltropfen gemessen. Er hat nachgewiesen, dass die elektrische Ladung quantisiert ist als ganzzahliges Vielfaches einer Elementarladung e und er hat den Wert von e bestimmt.

242.2.1 Erläuterungen *e*

Mit einem Zerstäuber werden kleine Öltröpfchen erzeugt, die sich in der Regel durch Reibung elektrostatisch aufladen. Wegen der Oberflächenspannung und ihrer Kleinheit haben die Tröpfchen

[1] R. A. Millikan, 1868-1953; Phys. Rev. Ser. I, *32*, 349-397 (1911); Phys. Rev. Ser. II, *2*, 109–143 (1913); Nobelpreis 1923

Kugelgestalt. Einige wenige dieser Tröpfchen werden in ein elektrisches Feld (zwischen die Platten eines Kondensators) gebracht, das parallel zur Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$ ausgerichtet ist. Mit der Konvention, dass nach unten gerichtete Kräfte positives Vorzeichen haben, wirken auf einen Öltropfen folgende Kräfte:

1. Die Gravitationskraft, $\vec{F}_g = m\vec{g} = \rho_{\text{Öl}} \frac{4\pi}{3} r^3 \vec{g}$.

   Dabei ist $\rho_{\text{Öl}}$ die Massendichte des Öls;
   m die Masse des Tropfens;
   r der Radius des Tropfens.

2. Auftrieb, $\vec{F}_{\text{A}} = -\rho_{\text{Luft}} \frac{4\pi}{3} r^3 \vec{g}$.

   Hier ist ρ_{Luft} die Massendichte der Luft, die durch den Öltropfen verdrängt wird. Die Nettokraft aus Gravitation und Auftrieb hängt von der Differenz der Massendichten des Öls und der Luft ab. Da $\rho_{\text{Öl}} \gg \rho_{\text{Luft}}$ ist, kann der Beitrag des Auftriebs vernachlässigt werden.

3. Stokessche Reibung, $\vec{F}_{\text{R}} = -6\pi r \eta_{\text{Luft}} \vec{v}$.

   Dabei ist $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Kugel und η_{Luft} die Viskosität der Luft.
   Frage: Ist hier die dynamische oder die kinematische Viskosität gemeint?
   Je nach Summe der externen Kräfte bewegt sich das Teilchen nach oben oder nach unten. Die Richtung der Reibungskraft ist der Geschwindigkeit entgegengesetzt. Die Stokessche Reibungsformel gilt für die Annahmen der Kontinuumsmechanik, d.h. bei der Wechselwirkung zwischen Fluid und Kugel tritt die Molekülstruktur des Fluid nicht in Erscheinung. Wenn aber der Radius der Kugel in die Größenordnung der freien Weglänge der Moleküle im Fluid liegt oder kleiner ist, wird die Wechselwirkung zwischen Fluid und Kugel zunehmend von der Granularität, d.h. der Molekülstruktur des Fluids bestimmt („Das Öltröpfchen passt ohne Wechselwirkung zwischen die Luftmoleküle“). Unter diesen Umständen überschätzt die Stokessche Formel die Reibungskraft. Man korrigiert die Stokessche Formel, indem man die Viskosität der Luft η_{Luft} durch eine effektive Viskosität ersetzt, die in erster Näherung[2] durch $\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{Luft}}/(1 + A/r)$ gegeben ist. Der Wert der Konstante A des Korrekturterms ist proportional der freien Weglänge. Bei Bodendruck und für Teilchen größer als 10 µm beträgt die Korrektur weniger als 2% und kann vernachlässigt werden.
   Wegen der geschwindigkeitsproportionalen Stokesschen Reibung erreichen die Öltröpfchen unter der Wirkung von externen Kräften eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit (engl. *terminal velocity*). Für die kleinen Öltröpfchen in Luft, die beim Millikanversuch benutzt werden, dauert es nach Einschalten des elektrischen Feldes ein paar Millisekunden bis die Endgeschwindigkeit erreicht ist.

4. Elektrostatische Kraft, $\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E}$.

   Dabei ist $q = Ne$ die gesamte Ladung auf dem Öltropfen und N die Anzahl der Elementarladungen e. $\vec{E}$ ist das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten. Je nach Polung der Spannung an den Kondensatorplatten ist die Kraft nach oben oder unten gerichtet.

Für den Fall des sinkenden Tröpfchens ($v_\downarrow$) gilt folgendes Kräftegleichgewicht:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g - 6\pi \eta_{\text{eff}} r v_\downarrow = -NeE, \tag{242.6}$$

[2] Diese Korrektur geht auf Cunningham zurück

und für des steigenden Tröpfchens ($v_\uparrow$) entsprechend

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g + 6\pi \eta_{\text{eff}} r v_\uparrow = +NeE. \tag{242.7}$$

Wenn man beim Experimentieren dieselbe absolute Feldstärke für beide Fälle nutzt, erhält man aus den Gleichungen 242.6 und 242.7 für den Tröpfchenradius

$$r = \sqrt{\frac{9\eta_{\text{eff}}(v_\downarrow - v_\uparrow)}{4g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})}}, \tag{242.8}$$

und für die Gesamtladung auf dem Tropfen

$$Ne = 3\pi \eta_{\text{eff}} r \frac{v_\downarrow + v_\uparrow}{E}. \tag{242.9}$$

Aufgabe 242.A: *Skizzieren Sie für die beiden Fälle aufsteigendes und fallendes Öltröpfchen die Kraftvektoren, die auf den Tropfen wirken und die Polung der Kondensatorplatten.*

242.2.2 Versuchsdurchführung e_0

Wir verwenden die kommerziell erhältliche Millikanapparatur der Firma Pasco[3]. Abb. 242.2 zeigt eine Aufsicht der Apparatur und erläutert die wichtigsten Komponenten. Ferner benötigt man ein gut stabilisiertes Netzgerät, das bis zu 500 V Gleichspannung und mindestens 10 mA Strom liefern kann (bei dem verwendeten Netzgerät wird die eingestellte Spannung angezeigt), eine Spannungsversorgung für die Lampe, eine Stoppuhr und Kabel.

Zur **Vorbereitung** werden die elektrischen Verbindungen (500 V Netzgerät an Buchsen Kondensatorspannung; 12 V Netzgerät an Lampengehäuse) hergestellt. Der Umpolschalter für die Kondensatorspannung wird auf die Mittelstellung („plates grounded“) gebracht; damit sind die Kondensatorplatten von dem 500 V Netzgerät getrennt und miteinander elektrisch verbunden.
Frage: Warum ist dies für die Befüllung der Kondensatorkammer mit Öltröpfchen wichtig?
Der Schalter für die Zusatzionisation wird in die Mittelstellung („Spray Droplet Position“) gebracht; damit wird ein Entlüftungsloch in der Kondensatorkammer geöffnet durch das Luft aus der Kammer beim Einfüllen der Öltröpfchen entweichen kann. Mit der eingebauten Wasserwaage wird die Apparatur horizontal ausgerichtet.
Frage: Was passiert, wenn die Apparatur NICHT-horizontal ausgerichtet ist?

Das optische System ist zu kontrollieren und ggf. zu justieren. Das Mess- und Beobachtungsmikroskop („viewing scope“) besteht aus Objektiv und Okular. Das Messgitter wird mit dem Okular wie eine Lupe betrachtet, mit dem Dioptrienausgleichsring („recticle focussing ring“) scharf gestellt und so dem individuellen Auge des Beobachters angepasst. Das Objektiv bildet die Öltröpfchen auf ein „Zwischenbild“ im Mikroskop ab; durch Variation des Abstands zwischen Objektiv und der Kombination Okular/Messgitter mit dem Fokussierring („droplet focussing ring“) wird

[3] Die erste Version wurde Mitte der 1960-er Jahre hergestellt. Die Firma Pasco stellt unter www.pasco.com eine ausführliche Bedienungsanleitung zur Verfügung, die als Ergänzung zu dieser Versuchsbeschreibung nutzbar ist.

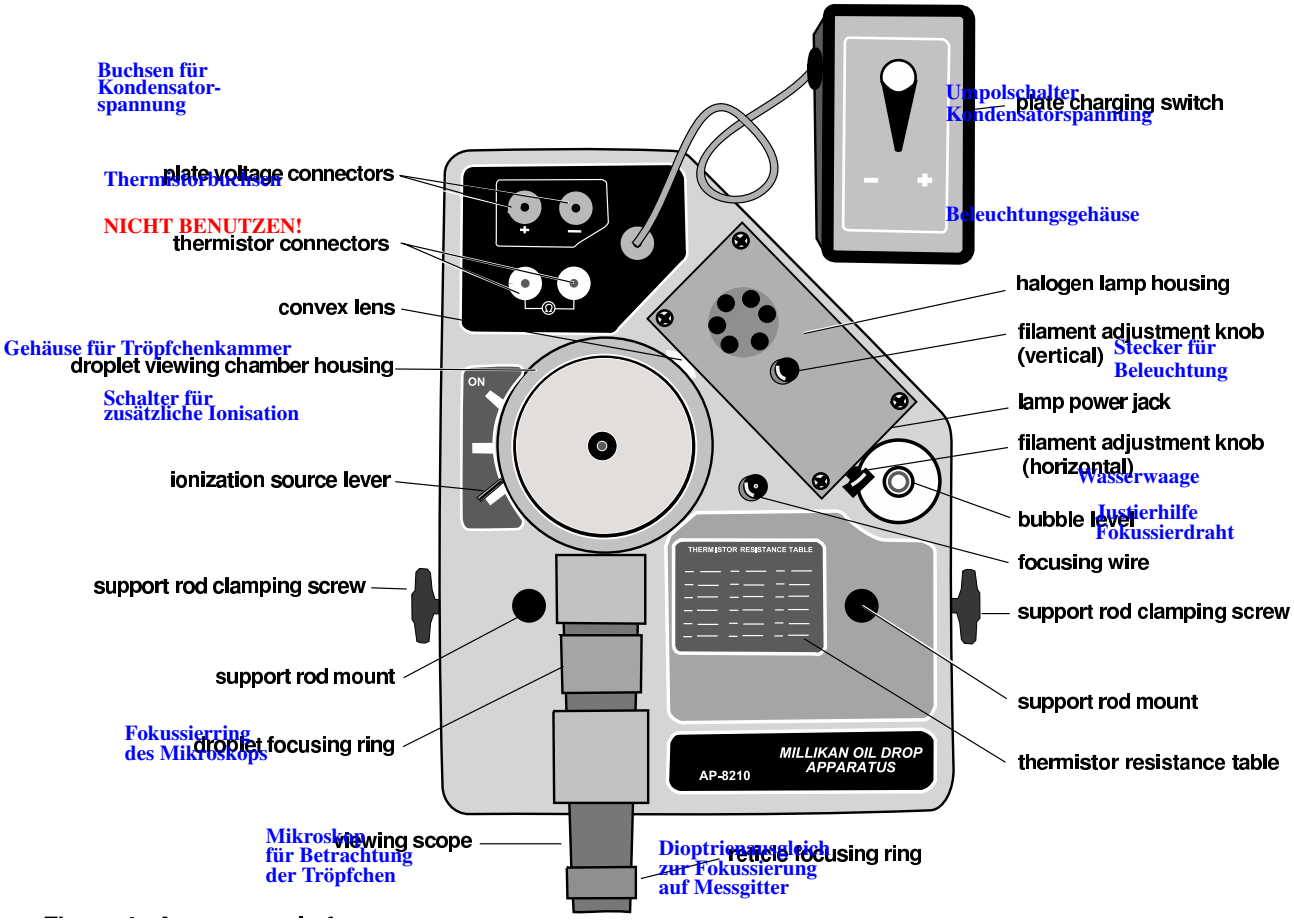


Abbildung 242.2: Aufsicht auf die Millikanapparatur

das Messgitter in die Zwischenbildebene gebracht, sodass die Bilder der Öltröpfchen und die Gitterstriche gleichzeitig scharf erscheinen. Die Öltröpfchen werden durch ein Loch in der Mitte der kreisförmigen Kondensatorplatten in die Kondensatorkammer geführt. Durch dieses Loch kann man den Fokussierdraht („focussing wire“) als Justierhilfe einführen und als Objekt bei der Justage des Mikroskops nützen. Die optische Achse des Mikroskops ist auf auf einen geschwärzten Teil der Kondensatorkammer gerichtet. Die Öltröpfchen werden schräg zur optischen Achse beleuchtet und erscheinen als helle Punkte vor einem dunklen Hintergrund (Dunkelfeldbeleuchtung). Die Beleuchtung ist optimal, wenn die rechte Kante des Fokussierdrahtes den höchsten Kontrast zur Drahtmitte hat (einstellbar am „horizontal filament adjustment knob“) und der Draht am hellsten im Bereich des Messgitters leuchtet (einstellbar am „vertical filament adjustment knob“).

Wenn noch nicht geschehen, so ist der Schutzdeckel („droplet hole cover“) über dem Einfüllloch in der oberen Kondensatorplatte zu entfernen.

Hinweis: Wenn Einbringen des Öls durch das Loch der oberen Kondensatorplatte zu viel/häufig eingesprüht wird, kann das Loch sich mit Öl zusetzen. (Dann hilft auch kein weiteres Öl mehr!) Wenn Sie also trotz mehrfachen Einsprühens keine Tröpfchen sehen, dann trennen Sie das Millikan-Gerät von der Stromversorgung, nehmen die obere Kondensatorplatte heraus und reinigen sie.

Aufgabe 242.c: *Erste Aufgabe mit der vorbereiteten Apparatur ist es,* ***Öltröpfchen in die Kondensatorkammer zu sprühen****. Dazu wird der Gummiball des Zerstäuber vielfach schnell gedrückt, während die Austrittsdüse auf ein Stück Papier gerichtet ist. Wenn auf dem Papier Öl sichtbar wird, kann die* Millikansche *Apparatur mit Öltröpfchen gefüllt werden. Die Austrittsdüse wird über das Loch im Deckel des Gehäuses der Tröpfchenkammer gehalten und mit nur EINEM Druck auf dem Ball Öltröpfchen in die Öffnung gesprüht. Es ist wichtig, das so wenig Tröpfchen wie möglich in die Kondensatorkammer gelangen, da sonst nicht nur die Identifikation einzelner Tropfen schwierig wird, sondern auch durch die Vielzahl an Tropfen im Beleuchtungsstrahl ein undurchdringlicher Nebel entstehen kann. Wenn dieses Unglück passiert ist, muss man mehrere Minuten warten, bis die Tropfen aus dem Gesichtsfeld sedimentiert sind; u.U. kann man durch Zuschalten des elektrischen Feldes diesen Prozess beschleunigen. Wenn im Gesichtsfeld des Mikroskops helle Öltröpfchen sichtbar sind, wird das Entlüftungsloch geschlossen; dies verhindert den Zutritt weiterer Tröpfchen aus dem Gehäusevolumen oberhalb der Kondensatorkammer. Sicherheitshalber sollte das Eintrittloch in die Kondensatorkammer in der oberen Kondensatorplatte mit dem schwarzen Stopfen verschlossen werden.*

Aufgabe 242.d: *Es ist ein* ***für die Messung geeignetes Öltröpchen zu suchen****. Durch Einschalten des elektrischen Feldes in beiden Richtungen werden geladene Tröpfchen identifiziert. Die Endgeschwindigkeit sollte zwischen 1/10 mm/s und 1/100 mm/s liegen. Bewegt sich ein Tröpfchen unter Einfluss des elektrischen Feldes zu schnell, so trägt es wahrscheinlich eine zu hohe Anzahl N von Elementarladungen. Falls kein geeignetes geladenes Teilchen zu finden ist, kann bei abgeschalteten elektrischen Feld die radioaktive Quelle für Zusatzionisation kurz zugeschaltet werden. Teilchen, die zu geringe Masse haben („zu klein sind"), wird durch Molekülstöße eine* Brownschen *Zitterbahn überlagert, sodass die Endgeschwindigkeit nicht bestimmt werden kann.*

Aufgabe 242.e: *Es ist für den ausgewählten Tropfen die* ***Endgeschwindigkeit zu messen****, und zwar sowohl in beiden Feldrichtungen als auch bei abgeschaltetem Feld. Aus den Gleichungen 242.6 und 242.7 kann man ableiten, dass zwischen den drei Geschwindigkeiten die Beziehung*

$$2v_0 = v_\downarrow - v_\uparrow \tag{242.10}$$

im Rahmen der Messgenauigkeit gelten muss. Falls dies nicht der Fall ist, hat sich die Anzahl der Ladungen auf dem Öltröpfchen während der Messung geändert und damit ist diese Messung nicht auswertbar.

Aufgabe 242.B: *Beweisen Sie Gleichung 242.10.*

Aufgabe 242.f: *Die Messungen der Endgeschwindigkeiten an einem Tröpfchen sind mindestens 5 mal zu wiederholen und es sind an mindestens 10 verschiedenen Tröpfchen die drei Endgeschwindigkeiten zu bestimmen.*

Strichabstand Messgitter: Grobeinteilung	0,5 mm
Feineinteilung	0,1 mm
Abstand Kondensatorplatten	steht auf der Apparatur
Massendichte des Öls	886 kg/m^3
Massendichte Luft	1,225 kg/m^3 (bei 15 °C, 1013 hPa)
Dynamische Viskosität von Luft bei 1 atm (nach Kohlrausch):	
bei 0 °C	17,20 µPa s
bei 20 °C	18,19 µPa s
bei 40 °C	19,12 µPa s
(Die Angaben zur Viskosität in der Pasco Anleitung weichen um ca. 0.3% ab)	

Tabelle 242.1: Daten zur Millikanapparatur

242.2.3 Auswertung e_0

Aufgabe 242.g: *Näherungsweise Bestimmung der Gesamtladung auf den Tröpfchen und des Teilchenradius ohne Cunningham-Korrektur: Aus der Zimmertemperatur wird die Viskosität der Luft durch Interpolation der Werte in Tabelle 242.1 bestimmt. Dann wird mit den Gleichungen 242.8 und 242.9 die ungefähre Ladung $q_{S,i}$ und der Radius r_i mit der unkorrigierten Stokesschen Viskositätsformel (d.h. mit η_{Luft} anstatt mit η_{eff}) aus den gemessenen Geschwindigkeiten für jedes Tröpfchen i berechnet.*

Aufgabe 242.h: *Bestimmung der Anzahl N_i der Ladungen auf den Tröpfchen: Man suche den größten gemeinsamen Teiler für alle gefundenen Ladungen $q_{S,i}$. Damit kennt man die ganzzahlige Anzahl N_i der Elementarladungen auf jedem Teilchen und erhält so eine Reihe von ungefähren Werten $e_{S,i} = q_{S,i}/N_i$ für die Elementarladung.*

Aufgabe 242.i: *Anbringen der Cunningham-Korrektur: Aus den Gleichungen 242.8 und 242.9 kann man ableiten, dass die unkorrigierten Werte $e_{S,i}$ für die Elementarladungen mit dem korrigiertem Wert e_0 durch*

$$e_0 = e_{S,i} \times \left(1 + \frac{A}{r_i}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{242.11}$$

verbunden sind. Umgestellt lautet Gleichung 242.11

$$(e_{S,i})^{\frac{2}{3}} = (e_0)^{\frac{2}{3}} \times \left(1 + \frac{A}{r_i}\right). \tag{242.12}$$

Ein Graph von $(e_{S,i})^{2/3}$ gegen $1/r_i$ ergibt eine Gerade, aus deren Achsenabschnitt man die gesuchte Elementarladung e_0 bestimmt. Der Graph bietet gleichzeitig eine augenfällige Kontrolle, ob man die Anzahl N_i auf den einzelnen Tröpfchen richtig bestimmt hat.

Aufgabe 242.j: *Beweisen Sie Gleichung 242.11.*

242.3 Masse des Elektrons

Aufgabe 242.k: *Berechnen Sie die Masse des Elektrons aus den bestimmten Fundamentalkonstanten e/m und e_0.*

Anhang A1

Kurzeinführung in die Statistik

Literatur: Brandt: Datenanalyse; Barlow: Statistics; Cowan: Statistical Data Analysis

A1.1 Messungen aus statistischer Sicht

Beim Messen ermittelt man mittels experimenteller Techniken den Wert physikalischer Größen. Statistisch gesehen sind diese Messgrößen Zufallsvariablen, die durch im Allgemeinen unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (häufig auch mit PDF für *probability density function* abgekürzt) beschrieben werden. Messwerte stellen eine Stichprobe der durch die PDF beschriebenen Grundgesamtheit (also der Menge aller möglichen Messergebnisse) dar.

Das (Un-)Wissen über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung variiert von Fall zu Fall. Manchmal kennt man die Form der Verteilung, weiß jedoch nichts über deren charakteristische Parameter, in anderen Fällen ist nicht einmal die Form der PDF bekannt. Ziel einer Messung ist in der Regel die Schätzung der Parameter der zugrunde liegenden PDF anhand der verfügbaren Messwerte. Bei geeignet gewählten Schätzern ist die Präzision der Schätzung nur duch den Stichprobenumfang (also der Anzahl der Messwerte) beschränkt. Ist die Form der PDF unbekannt, werden üblicherweise generische Parameter, wie z. B. der Mittelwert oder die Standardabweichung der Verteilung abgeschätzt.

Eine besondere Stellung unter den PDFs nimmt die Gaußverteilung ein. Ihre Bedeutung liegt im *Zentralen Grenzwertsatz* begründet, der besagt, dass die Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen für $n \to \infty$ gaußverteilt ist, unabhängig davon, wie die einzelnen x_i verteilt sind. Eine Gaußverteilung wird durch die Funktionsvorschrift

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right) \tag{A1.1}$$

beschrieben und besitzt zwei Parameter, μ und σ.

A1.2 Schätzung von Parametern

Bei der Diskussion von Parameterschätzungen muss man stets darauf achten, dass man einen Parameter und seinen Schätzer nicht verwechselt. Um den Unterschied deutlich zu machen, werden im Folgenden Schätzer durch ein Hut-Symbol gekennzeichnet, z. B. kennzeichnet $\hat{\mu}$ einen Schätzer des Parameters μ.

Schätzer für Parameter operieren auf dem Stichprobenraum (einer Teilmenge der Grundgesamtheit), wohingegen in die Bestimmung der Parameter selbst die gesamte Grundgesamtheit einfließt.

A1.2.1 Mittelwert

Als (Populations-)Mittelwert μ einer Zufallsvariablen x, die gemäß einer PDF $f(x)$ verteilt ist, bezeichnet man den Erwartungswert

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \mu. \tag{A1.2}$$

Im Fall einer diskreten Zufallsvariablen geht Gleichung A1.2 über in

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{A1.3}$$

Hier ist N die Populationsgröße und x_i sind die Populationsmitglieder.

Als Schätzer $\hat{\mu}$ für den Mittelwert μ einer Grundgesamtheit wird häufig der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ der Stichprobenelemente verwendet:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{A1.4}$$

Hierbei bezeichnet n den Stichprobenumfang (Anzahl der Messungen, die für die Schätzung zur Verfügung steht) und x_i die Stichprobenelemente. $\overline{x}$ wird auch Stichprobenmittelwert genannt.

A1.2.2 Varianz und Standardabweichung

Die (Populations-)Varianz $V[x]$ einer Zufallsvariablen x mit PDF $f(x)$ ist definiert als der folgende Erwartungswert

$$E[(x - E[x])^2] = \int_{\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x = V[x] \tag{A1.5}$$

$$= E[x^2] - \mu^2. \tag{A1.6}$$

Für diskrete Zufallsvariablen lässt sich Gleichung A1.5 als

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \tag{A1.7}$$

schreiben.

Ein Schätzer $\hat{V}$, der aus einer gegebenen Strichprobe die Varianz V einer Grundgesamtheit ab-

schätzt, ist

$$\hat{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \tag{A1.8}$$

$\hat{V}$ wird Stichprobenvarianz genannt. Beim Vergleich von Gleichung A1.7 und Gleichung A1.8 fallen einem folgende Unterschiede auf:

- Für den Schätzer wird der Schätzer des Mittelwertes $\hat{\mu} = \overline{x}$ verwendet (der Mittelwert selbst ist in der Regel unbekannt).

- Im Nenner des Schätzers $\hat{V}$ wird durch $n - 1$ geteilt. Dies liegt darin begründet, dass dieselben Daten, die zur Varianzschätzung herangezogen werden, vorher schon zur Schätzung des Mittelwerts verwendet wurden. Durch die Mittelwertschätzung geht dem System quasi ein Freiheitsgrad verloren[1].

Die Standardabweichung σ einer Grundgesamtheit ergibt sich durch Wurzelziehen aus der Varianz V:

$$\sigma = \sqrt{V}. \tag{A1.9}$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Elemente der Grundgesamtheit um ihren Mittelwert μ. Im Zusammenhang mit Messungen wird die Standardabweichung häufig auch als *Unsicherheit* oder *Fehler* der Messung bezeichnet.

Analog gilt für die Schätzer der Zusammenhang[2]:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}}. \tag{A1.10}$$

Neben den Stichprobenelementen x_i ist auch der Mittelwertschätzer $\hat{\mu}$ eine Zufallsvariable. Wiederhole ich eine Messreihe aus n Einzelmessungen m mal, ergeben sich im Allgemeinen m verschiedene Schätzwerte $\hat{\mu}_i$ für den Mittelwert μ, obwohl μ für alle Messreihen identisch ist. Ein Maß für die Streuung der geschätzten Mittelwerte $\hat{\mu}_i$ ist ihre Standardabweichung. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \sqrt{V[\overline{x}]} = \sqrt{E[\overline{x}^2] - (E[\overline{x}])^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{A1.11}$$

Die Präzision eines Mittelwertschätzers nimmt also mit der Quadratwurzel des Stichprobenumfangs n zu. Vervierfacht man den Stichprobenumfang, verringert sich die Unsicherheit des Mittelwertschätzers um einen Faktor zwei.

Analog lassen sich für andere Schätzer die Varianz (und Standardabweichung) bestimmen. Entsprechende Formeln können der Literatur entnommen werden (siehe z. B. Glen Cowan, Statistical Data Analysis, Kapitel 5.2).

[1] Über diese Plausibilitätsargumentation hinaus lässt sich mathematisch zeigen, dass nur bei Division durch $n - 1$ der Schätzer erwartungstreu ist.

[2] Man beachte, dass $\hat{\sigma}$ wie in Gleichung A1.10 definiert nicht erwartungstreu ist, obwohl dies für $\hat{V}$ der Fall ist.

A1.2.3 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y mit der PDF $f(x, y)$ und den Populationsmittelwerten μ_x und μ_y ist definiert als

$$V_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x\mu_y \tag{A1.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \mu_x\mu_y. \tag{A1.13}$$

Diese Größe gibt Auskunft über den statistischen Zusammenhang zwischen x und y (auch Korrelation genannt) und zwar bedeutet

- $V_{xy} > 0$, dass Überfluktuationen von x (also Stichprobenelemente mit $x_i > \mu_x$) bevorzugt einhergehen mit Überfluktuationen von y bzw. Unterfluktuationen von x mit Unterfluktuationen von y, und
- $V_{xy} < 0$, dass Überfluktuationen von x bevorzugt einhergehen mit Unterfluktuationen von y, bzw. Unterfluktuationen von x mit Überfluktuationen von y.

Beim Vergleich der Korrelationsstärke verschiedener Zufallsvariablenpaare ist es von Nachteil, dass die Kovarianz dimensionsbehaftet ist. Dieser Nachteil wird durch die Einführung des Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} wettgemacht:

$$\rho_{xy} = \frac{V_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \tag{A1.14}$$

ρ_{xy} kann Werte im Bereich $-1 \le \rho_{xy} \le 1$ annehmen.

Aufgrund der Differenzterme ist V_{xy} invariant unter Verschiebungen des Koordinatenursprungs.

Ein (erwartungstreuer) Schätzer $\hat{V}_{xy}$ für die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y ist

$$\hat{V}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})) = \frac{n}{n-1}(\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}). \tag{A1.15}$$

Ein (nur asymptotisch[3] erwartungstreuer) Schätzer $\hat{\rho}_{xy}$ für den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} ist

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{V}_{xy}}{\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}. \tag{A1.16}$$

A1.3 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Häufig ist die Größe g, die man experimentell bestimmen möchte, nicht direkt messbar, sondern ergibt sich aus einer funktionalen Beziehung $g(\vec{x})$ der Messgrößen $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. In diesem Fall pflanzen sich die Unsicherheiten der Messgrößen auf die gesuchte Endgröße fort.

[3] D. h. für $n \to \infty$, also für einen großen Stichprobenumfang.

In dem Fall, wo $g(\vec{x})$ in einer Umgebung in der Größenordnung der x_i-Unsicherheiten als ungefähr linear betrachtet werden kann, lässt sich das Fortpflanzungsgesetz für die Unsicherheiten recht einfach herleiten. Eine Tayler-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in $\vec{x}$ liefert

$$g(\vec{x}) \approx g(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i - \mu_i), \tag{A1.17}$$

wobei die μ_i die Mittelwerte für die Zufallsvariablen x_i sind. In dieser Näherung ergibt für die Varianz σ_g^2 von g

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}, \tag{A1.18}$$

wobei V_{ij} die Kovarianz für die Zufallsvariablen x_i und x_j ist. Im Fall unkorrelierter Zufallsvariablen vereinfacht sich Gleichung A1.18 zu

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} \sigma_i^2. \tag{A1.19}$$

Hier kennzeichnet $\sigma_i^2 = V_{ii}$ die Varianz für die Zufallsgröße x_i.

A1.4 Geraden-Anpassung („Fit“)

Im Folgenden ist die Einstellvariable x immer als fehlerfrei angenommen. Für die Anwendungen in diesem Praktikum ist diese Voraussetzung gut erfüllt. In der Praxis wird es oft vorkommen, dass auch die variierte Größe x einen Fehler σ_x (z.B. die Auflösung eines Gerätes) hat.

A1.4.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least squares)

Die Aufgabe besteht darin, an die Messpunkte $\{y_i \pm \sigma(y_i), x_i\}$ eine Gerade $y = mx + n$ anzupassen. Es sollen der Achsenabschnitt $n \pm \sigma_n$ und die Steigung $m \pm \sigma_m$ bestimmt werden. Die Gausssche Methode verlangt, dass die Summe aller varianzgewichteten Abweichungsquadrate der N Messpunkte von der Geraden minimal ist:

$$\chi^2(m,n) := \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma^2(y_i)} \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \tag{A1.20}$$

Die Größe χ^2 im Minimum ist also ein Gütekriterium für die Anpassung.

Dieser Ansatz für χ^2 gewährleistet, dass die Fit-Gerade durch Messpunkte mit großem Fehler wenig und durch solche mit kleinem Fehler stark bestimmt wird. Dafür sorgt die Wichtung mit $1/\sigma^2(y_i)$. Mit der gleichen (in diesem Anhang nur durch die Fehler $\sigma(y_i)$ gegebenen) Wichtung müssen beide Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ berechnet werden.

A1.4.2 1. Fall: Alle Messwerte y_i haben den gleichen Fehler $\sigma(y_i) = \sigma_y$

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt in diesem einfachen Fall für den Fit einer Geraden die Minimierung der Summe

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_y^2}$$

bezüglich beider Geradenparameter m und n. Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach m und nach n führt auf zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial m} \stackrel{!}{=} 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - n)x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} \stackrel{!}{=} 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - n) \quad \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Mit den Mittelwerten $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (die in diesem einfachen Fall den ungewichteten Mittelwerten gleich sind) folgt daraus das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \overline{xy} - m\overline{x^2} - n\overline{x} &= 0 \\ \overline{y} - m\overline{x} - n &= 0. \end{aligned}$$

Daraus erhält man m und n:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{V_{xy}}{V[x]} \tag{A1.21}$$

$$n = \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \overline{y} - m\overline{x} \tag{A1.22}$$

Die Fehler der Steigung m und des Achsenabschnitts n ergeben sich, weil die Messpunkte untereinander nicht korreliert sind, mit Fehlerfortpflanzung aus Gleichungen A1.21 und A1.22 zu

$$V[m] = \sigma^2[m] = \sum_i \left(\frac{x_i - \overline{x}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \tag{A1.23}$$

$$V[n] = \sigma^2(n) = \sum_i \left(\frac{\overline{x^2} - \overline{x}x_i}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2 \overline{x^2}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \tag{A1.24}$$

$$\rightsquigarrow V[n] = \overline{x^2} V[m].$$

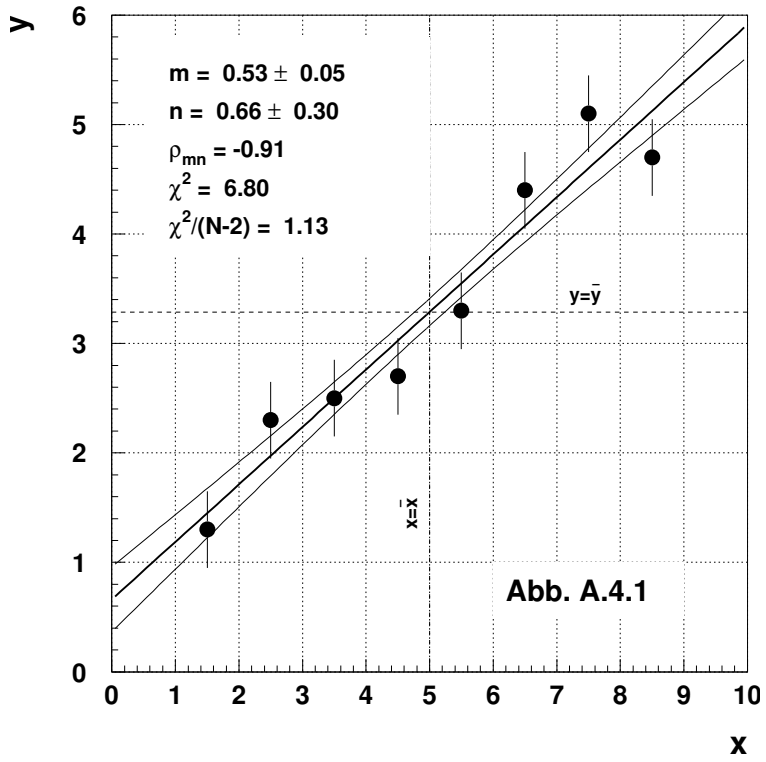


Abbildung A1.1: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 1. Fall.

Achsenabschnitt n und Steigung m sind im Allgemeinen korreliert. Ihre Kovarianz ist

$$V_{mn} = -\frac{\overline{x}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \cdot \sigma_y^2 = -V[m] \cdot \overline{x}. \tag{A1.25}$$

Diese Korrelation – und damit die Kovarianz – verschwindet, wenn $\overline{x} = 0$ gilt, oder dies durch Translation $x \to x' = x - \overline{x}$ erst erreicht und dann der Geraden-Fit durchgeführt wird. Nur in diesem Fall ist „gewöhnliche“ Fehlerfortpflanzung, $\sigma^2(y(x)) = \sigma^2(m)x^2 + \sigma^2(n)$, richtig.

Abb. A1.1 gibt ein Beispiel für diesen 1. Fall. Der Datensatz umfasst 8 Messpunkte mit gleichem Fehler σ_y. Die Fit-Gerade ist eingezeichnet; sie geht immer durch die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (nützliche Erkenntnis beim Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden „von Hand“). Die Fit-Parameter m und n sind angegeben, ebenso der Fit-Wert für das minimale χ^2. Ebenfalls eingezeichnet sind die 1σ-Konturen um die Gerade (siehe Abschnitt A1.4.6). χ^2 bezieht sich auf die Wertemenge. (Zu $\chi^2/(N-2)$ siehe den letzten Abschnitt dieses Anhangs.)

A1.4.3 2. Fall: Jeder Messwert y_i hat einen eigenen unabhängigen Fehler $\sigma(y_i) := \sigma_i$

Durch diese Fehler $\sigma(y_i)$ bekommt jeder Messpunkt (y_i, x_i) im Fit das Gewicht $1/\sigma_i^2$. Die zu minimierende Summe ist nun

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2} =: \chi^2.$$

Die Formeln für die Steigung (Gleichung A1.21) und den Achsenabschnitt (Gleichung A1.22) und deren Herleitung bleiben formal wie im Fall 1 erhalten, wenn bei der Bildung beider Mittelwerte $\overline{z} \in \{\overline{x}, \overline{y}\}$ die individuellen Gewichte $\sigma(y_i) =: \sigma_i$ hergenommen werden (**varianzgewichtete Mittelwerte**):

$$\overline{z} := \frac{\sum_i^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{A1.26}$$

Auch die Varianz-Formeln (Gleichungen A1.23, A1.24) werden modifiziert, indem neben den varianzgewichteten Mittelwerten anstelle von σ_y^2 die **varianzgemittelte Standardabweichung**

$$\overline{\sigma_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{A1.27}$$

eingesetzt wird. Diese Ersetzung muss auch in der Kovarianz-Formel (Gleichung A1.25) erfolgen.

Abb. A1.2 gibt ein Beispiel für diesen 2. Fall. Die 8 Messpunkte haben die gleichen Zentralwerte wie im 1. Beispiel, jetzt aber individuelle Fehler σ_i. Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$, Fit-Gerade und Fit-Wert χ^2 sind andere als im 1. Beispiel!

A1.4.4 3. Fall: Die Messwerte y_i haben sowohl unabhängige Fehler $\sigma(y_i)$ als auch systematische Fehler $s(y_i)$

Dieser allgemeine Fall führt auf nicht-triviale Formeln für Steigung und Achsenabschnitt sowie deren Fehler, auf die hier verzichtet werden.

Ein interessanter Spezialfall liegt vor, wenn alle Messpunkte den gleichen systematischen Fehler $s(y_i) =: s_y$ haben. Steigung und Achsenabschnitt sind auch hier formal durch Gleichungen A1.21 und A1.22, aber mit varianzgewichteten Mittelwerten, gegeben. Die Fehler sind jedoch andere. In

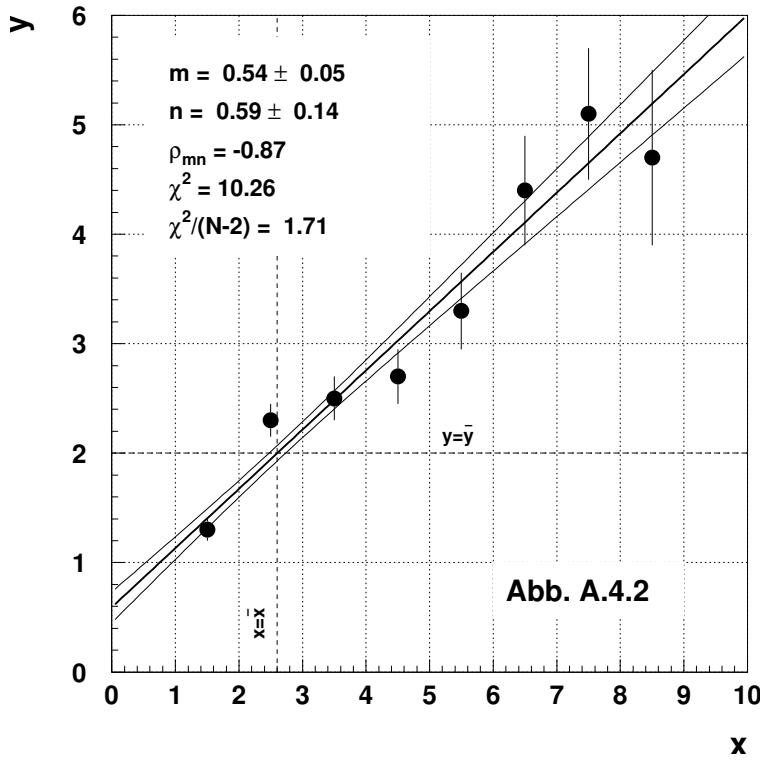


Abbildung A1.2: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 2. Fall. Auch hier geht die Ausgleichsgerade durch den (varianzgewichteten) Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

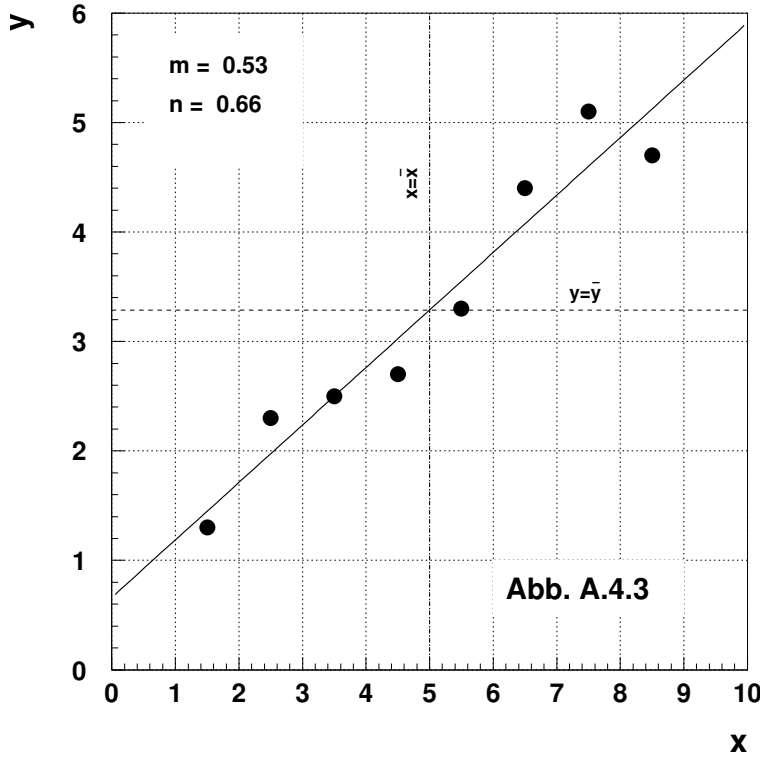


Abbildung A1.3: Punkte und Regressionsgerade als Beispiel zum 4. Fall.

diesem Spezialfall gilt für die Varianz der Steigung:

$$V[m] = \sigma^2[m] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \overline{x}^2)} \tag{A1.28}$$

Der gemeinsame Fehler s_y beeinflusst weder die Steigung noch deren Fehler. Für die Varianz des Achsenabschnitts gilt in diesem Spezialfall:

$$V[n] = \sigma^2[n] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}\overline{x^2} + s_y^2. \tag{A1.29}$$

Obwohl der gemeinsame Fehler s_y nicht den Fit-Wert für den Achsenabschnitt beeinflusst, vergrößert sich dessen Fehler $\sigma_n = \sqrt{V[n]}$ durch quadratische Addition. V_{mn} ändert sich nicht. Auf ein Beispiel zum 3. Fall wird verzichtet.

A1.4.5 4. Fall: Die Werte y_i haben keine Fehler.

Dieser Fall tritt bei physikalischen Messungen – und insbesondere in diesem Praktikum – nicht auf; alle Messwerte haben Messfehler. Er ist hier aufgeführt, weil die Aufgabe, den Trend der Wertepaare $\{y_i, x_i\}$ durch eine Gerade zu beschreiben, als Spezialfall des 1. Falls durch die glei-

chen Formeln (d.h. Gleichungen A1.21 und A1.22, natürlich mit ungewichteten Mittelwerten) gelöst wird und diese Formeln bzw. deren Bestandteile unter dem Namen **Lineare Regression** auf manchen Taschenrechnern programmiert sind. Das Ergebnis des ungewichteten Geradenfits ist in Abb. A1.3 dargestellt. Die Fehler von Steigung und Achsenabschnitt werden vom Taschenrechner in der Regel nicht ausgegeben, und χ^2 steht als Qualitätskriterium nicht zur Verfügung. Ähnliches kann für Standardprogramme auf PC-Rechnern gelten.

A1.4.6 Werteberechnung auf der Fit-Geraden

Sind Steigung und Achsenabschnitt samt Fehlern bestimmt, benötigt man oft einen Wert $y(x) \pm \sigma(y(x))$ auf der Fit-Geraden. Es gilt an der Stelle x:

$$y(x) = m \cdot x + n \tag{A1.30}$$

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot x^2 + \sigma^2[n] + 2V_{mn} \cdot x \tag{A1.31}$$

Der letzte Term ist i.A. nicht zu vernachlässigen! Die Kovarianz (aus Gleichung A1.25) verschwindet nur im „Schwerpunktsystem“ der Werte $\{x_i\}$, also wenn $\overline{x} = 0$ gilt. Nur dann sind m und n unabhängig. In diesem System gelangt man zu:

$$y(x) - \overline{y} = m \cdot (x - \overline{x})^2 \tag{A1.32}$$

und es gilt dann:

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot (x - \overline{x})^2 + \sigma_n^2 \tag{A1.33}$$

Insbesondere bekommen Extrapolationen aus dem Messpunkte-Bereich heraus schnell große Fehler.

A1.4.7 Güte des Geraden-Fits

Ein geeignetes Gütekriterium für die mittlere quadratische Abweichung zwischen Messdaten und Fit-Gerade erhält man durch richtige Normierung von χ^2 nach Gleichung A1.20. Die Normierung ist allgemein gegeben durch die Anzahl der Fit-Freiheitsgrade f, d.h. durch die Anzahl der verwendeten Messpunkte (N) abzüglich der Anzahl der Fit-Parameter. Letztere sind 2 beim Geraden-Fit, also braucht man $N > 2$ Messpunkte, um einen Fit durchführen zu können:

$$\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}} := \frac{\chi^2}{N-2} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2}. \tag{A1.34}$$

Für eine gute Beschreibung der Messdaten durch den Fit gilt χ^2/f nahe bei 1, d.h. die Ausgleichsgerade weicht im Mittel um nicht mehr als die (Mess-)Fehler von den Messpunkten ab.

A1.4.8 Hinweis zur „Ausgleichsgeraden per Hand“

Die obige mathematische Behandlung zeigt, dass die Ausgleichsgerade durch den varianzgewichteten Schwerpunkt der Datenpaare geht. Transformiert man das anfängliche Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt der neuen, verschobenen x-Achse im Datenschwerpunkt der $\{x_i\}$ liegt, so sind Steigung und Achsenabschnitt nicht mehr korreliert; zusätzlich liegt der Achsenabschnitt dann im Schwerpunkt der $\{y_i\}$ Diese Information hilft beim Zeichnen einer Ausgleichsgerade mit Lineal und Augenmaß. Zunächst schätzt man die Lage des Schwerpunktes ab (z.B. nimmt man die Mittelwerte der x_i und der y_i) und zeichnet ihn in den Graphen mit den Datenpaaren als zusätzlichen Punkt ein. Dann „sticht“ man einen Bleistift in den Schwerpunkt und schiebt das Lineal dagegen. Dann dreht man das Lineal um diese Bleistiftachse, bis die Datenpaare beidseitig der Lineallinie statistisch gleichmäßig verteilt sind, womit die Ausgleichsgerade festgelegt ist. Eine Fehlerabschätzung der Geradensteigung erhält man durch weiteres Drehen des Lineals bis auf der einen Seite der Drehachse alle Punkte oberhalb und auf der anderen Seite unterhalb des Lineals liegen; bei der zweiten Fehlergeraden vertauscht man „oberhalb“ und „unterhalb“. Da der Schwerpunkt innerhalb des Datenbereichs liegt, kreuzen sich auch Ausgleichs- und Fehlergeraden innerhalb des Datenbereichs.

Anhang A2

Schwingungen

Am Beispiel eines Drehschwingers werden im Folgenden die allgemeinen Eigenschaften schwingfähiger Systeme zusammengestellt und diskutiert.

A2.1 Freie Schwingung ohne Dämpfung

Idealisierter Fall: Reibungsverluste vernachlässigt.

Bewegungsgleichung (Drehmomentengleichung):

$$\Theta\ddot{\varphi} = -D\varphi, \tag{A2.1}$$

Θ = Trägheitsmoment des Drehkörpers
D = Richtkonstante
$D\varphi$ = rücktreibendes Drehmoment

Die zugehörige **Normalform** (für alle Schwingungssysteme) lautet:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta} \tag{A2.2}$$

Mathematisch handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung ist die Summe von 2 linear unabhängigen Lösungen. **Lösungsansatz:** $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ mit A und λ allgemein komplex. Die Lösung muss eine Funktion sein, die sich beim Differenzieren bis auf eine Konstante reproduziert. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \tag{A2.3}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \tag{A2.4}$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \tag{A2.5}$$

φ ist eine messbare Variable und daher reell. Gesucht sind also nur solche Lösungen, die ein reelles φ ergeben. Das legt den Konstanten A und B die Bedingung $B = A^*$ auf, d.h. wenn $A = a + ib$ ist, muss $B = a - ib$ sein. $\varphi(t)$ ist dann (Euler-Formel) zweimal der Realteil von $(a + ib) \cdot (\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t))$:

$$\varphi(t) = 2a \cdot \cos(\omega_0 t) - 2b \cdot \sin(\omega_0 t). \tag{A2.6}$$

Die noch unbestimmten Konstanten a und b werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt, z.B.: $\varphi(t=0) = \varphi_0 = 2a$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0 = -2b$.

Damit folgt aus Gleichung A2.6 $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$, mit der Frequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ und der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0$. Das System schwingt harmonisch, d.h. (co-)sinusförmig, mit konstanter Amplitude φ_0 und die Eigenfrequenz ω_0, welche unabhängig von der Amplitude ist.

Anmerkung: Die allgemeine Lösung in Gleichung A2.6 ist äquivalent zu der Lösungsform

$$\varphi(t) = c\cos(\omega_0 t - \alpha). \tag{A2.7}$$

Die beiden unbestimmten Konstanten a und b können durch die Konstanten $c^2 = 4(a^2 + b^2)$ und α mit $\tan\alpha = -b/a$ (α Phasenwinkel) ausgedrückt werden (Additionstheorem für den Cosinus).

A2.2 Freie Schwingung mit Dämpfung

Realistischer Fall: Reibungsverluste berücksichtigt.

Bewegungsgleichung:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \tag{A2.8}$$

mit dem Reibungs- (oder Dämpfungs-)Drehmoment $r\dot{\varphi}$, das proportional der Winkelgeschwindigkeit ist. Damit ergibt sich folgende **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad \text{mit} \quad 2\beta = \frac{r}{\Theta}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}. \tag{A2.9}$$

Im Allgemeinen führt der Lösungsansatz $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ zu zwei Werten für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{A2.10}$$

Es sind **drei Fälle** zu unterscheiden:

a) $\beta^2 > \omega_0^2$ Kriechfall,
b) $\beta^2 = \omega_0^2$ Grenzfall,
c) $\beta^2 < \omega_0^2$ Schwingfall,

die drei charakteristisch verschiedene Bewegungsformen (Abb. A2.1) beschreiben.

A2.2.1 Kriechfall ($\beta^2 > \omega_0^2$)

$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ist reell und positiv. $\lambda_1 = -\beta + \gamma$ und $\lambda_2 = -\beta - \gamma$ sind beide **reell** und **negativ** ($\gamma < \beta$). Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{A2.11}$$

mit den **reellen** Konstanten A und B, die durch gewählte Anfangsbedingungen festgelegt werden können. Das System schwingt nicht, sondern bewegt sich aperiodisch (Abb. A2.1, unten). Ist es

einmal aus der Ruhelage ausgelenkt, bewegt es sich asymptotisch kriechend zu ihr zurück (z.B. Fadenpendel in Sirup statt Luft).

A2.2.2 Aperiodischer Grenzfall ($\beta^2 = \omega_0^2$)

Hier fallen die beiden λ-Werte zusammen und es ist somit nur eine partikuläre Lösung gefunden. Zum Aufsuchen der zweiten, linear unabhängigen Lösung macht man den Ansatz:

$$\varphi(t) = f(t) \cdot e^{\lambda t}, \tag{A2.12}$$

und zwar mit der einfachsten Möglichkeit für $f(t)$, nämlich $f(t) = Bt$. Das führt zu der Bestimmungsgleichung für λ:

$$t \cdot (\lambda + \omega_0)^2 = -2\,(\lambda + \omega_0)\,. \tag{A2.13}$$

Sie ist nur dann für alle Zeiten t erfüllt, wenn $\lambda + \omega_0 = 0$; insbesondere λ **reell** und **negativ** ist. Damit ergibt sich die Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\omega_0 t} + Bte^{-\omega_0 t}; \quad A \text{ und } B \textbf{ reell}. \tag{A2.14}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) &= \varphi_0 = A \\ \dot{\varphi}(t=0) &= \ 0 \ = -\omega_0 \cdot A + B. \end{aligned}$$

$$\text{Damit:} \qquad \varphi(t) = \varphi_0\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}. \tag{A2.15}$$

Auch in diesem Fall ist die Bewegung aperiodisch. $\varphi(t)$ geht monoton gegen 0. Das System kommt in besonders kurzen Zeiten der Ruhelage sehr nahe, z.B. wird in der charakteristischen Zeit $T = 2\pi/\omega_0$ bereits der Wert $\varphi(T) = 0,014$ erreicht. Diese Bewegungsform stellt den Grenzfall der aperiodischen Bewegung dar. Das System schwingt gerade eben nicht (Abb. A2.1, Mitte).

Bei analogen Messgeräten mit schwingfähigen Messsystemen (z.B. Drehspulinstrumente) ist man an kurzen Einstellzeiten auf den Messwert (= Ruhelage) interessiert. Ihre Dämpfung wird daher in der Regel so gewählt, dass sie nahe dem aperiodischen Grenzfall arbeiten, und zwar gerade sowenig in Richtung „Schwingfall“ ($\beta^2 \leq \omega_0^2$), dass das Messsystem einmal durchschwingt und sich aperiodisch der Ruhelage nähert.

A2.2.3 Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$)

Wie im ungedämpften Fall ergeben sich zwei verschiedene **komplexe** Werte für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\hat{\omega}. \tag{A2.16}$$

Mit denselben Anfangsbedingungen wie im ungedämpften Fall erhält man die Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \cos\hat{\omega}t \quad \text{mit} \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{A2.17}$$

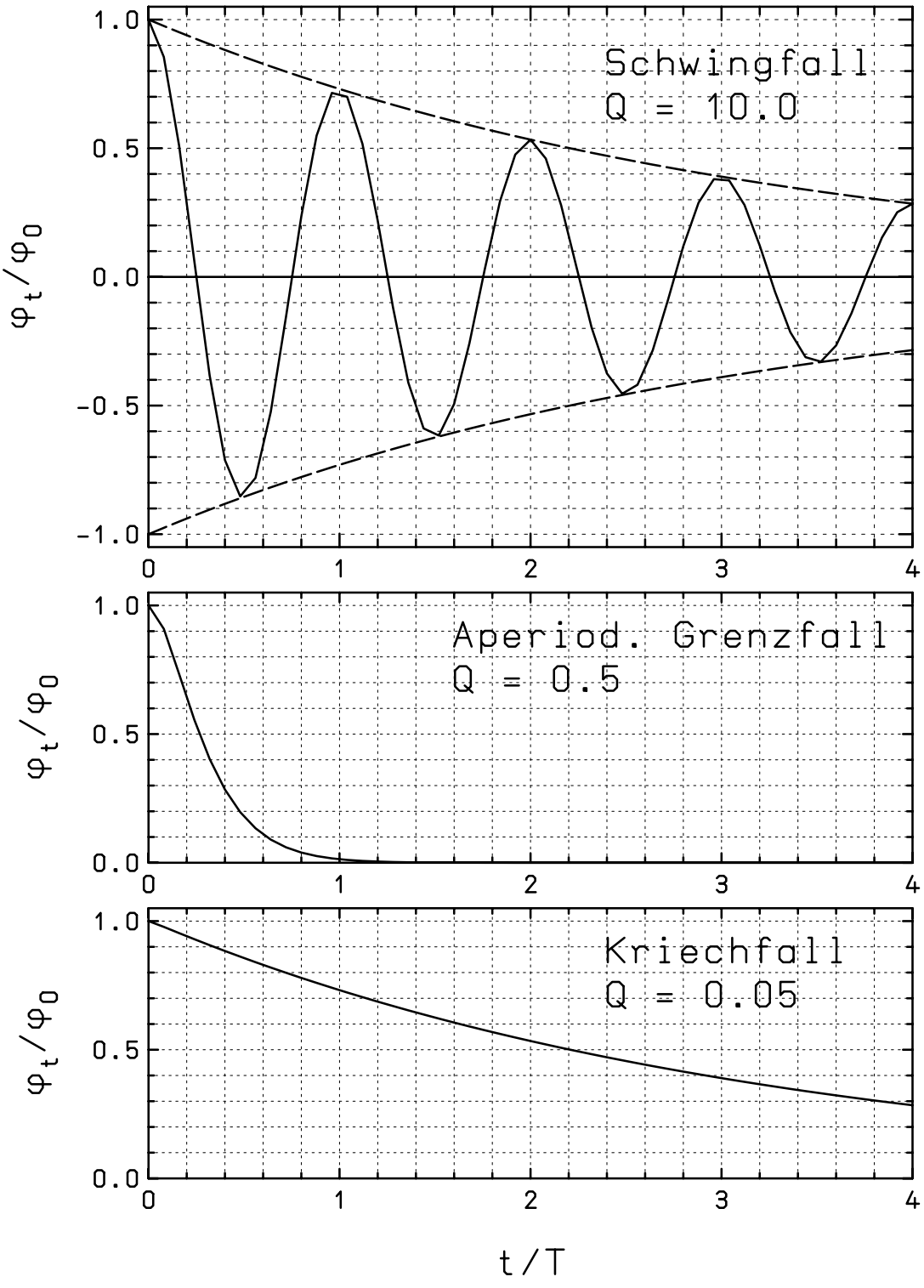


Abbildung A2.1: **Freie Schwingung** für die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ für den Schwingfall (oben), den aperiodischen Grenzfall (mitte) und dem Kriechfall (unten). Die Abszisse ist in Einheiten der Schwingungsdauer T angegeben.

Die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ dieser Schwingung ist kleiner als die der ungedämpften Schwingung (ω_0). Der Unterschied ist aber für fast alle Schwingsysteme sehr klein. Die Amplitude:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \tag{A2.18}$$

klingt exponentiell ab. Nach n bzw. $n+1$ Schwingungen beträgt sie:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi(nT) = \varphi_0 e^{-\beta n T} = \varphi_0 \left(e^{-\beta T}\right)^n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi((n+1)T) = \varphi_0 e^{-\beta (n+1) T} = \varphi_0 \left(e^{-\beta T}\right)^{n+1}, \end{aligned} \tag{A2.19}$$

wobei $T = 2\pi/\hat{\omega}$ die Schwingungsdauer und n ganzzahlig ist (Abb. A2.1, oben).

Aufeinanderfolgende Maximalausschläge unterscheiden sich um einen konstanten Faktor, nämlich um das **„Dämpfungsverhältnis" K**:

$$K := \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)^{1/n} = e^{\beta T}. \tag{A2.20}$$

Der Einfluss der Dämpfung kann auch durch die Zeit τ charakterisiert werden, nach der die Energie des schwingenden Systems auf 1/e abgesunken ist (die Energie ist proportional zu $\varphi^2(t)$):

$$\varphi^2(\tau) = \varphi_0^2 \cdot e^{-2\beta\tau} = \varphi_0^2 \cdot e^{-1}, \tag{A2.21}$$

d.h. $\tau = 1/2\beta$. Ein gedämpftes Schwingsystem wird durch seinen „Gütefaktor" oder einfach seine **„Güte" Q**:

$$Q := \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} \tag{A2.22}$$

charakterisiert. Für die weitere Diskussion soll nur noch diese (dimensionslose) Größe verwendet werden.

Drückt man die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ durch die des ungedämpften Systems (ω) und die Güte Q aus, so sieht man, dass diese Frequenzen nur wenig voneinander verschieden sind:

$$\hat{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \tag{A2.23}$$

Selbst für eine so geringe Güte wie $Q = 5$ ist $\hat{\omega} = 0.995\omega_0$. Daher wird im Folgenden die Näherung $\hat{\omega} \approx \omega_0$ verwendet. Damit ergibt sich:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\omega_0 t), \quad K = e^{\pi/Q} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{\pi}{\ln(K)}. \tag{A2.24}$$

Die Größe $\ln(K)$ heißt **logarithmisches Dekrement** der gedämpften Schwingung. Eine Bestimmung der Güte Q kann also in einfacher Weise über eine Messung des Dämpfungsverhältnisses $K = (\varphi_0/\varphi_n)^{1/n}$ erfolgen.

Nach Q Perioden ist die Energie der Schwingung auf den Bruchteil $e^{-2\pi} = 0,0019$ und die Amplitude auf den Bruchteil $e^{-\pi} = 0,043$ abgesunken.

A2.3 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

Wirkt auf ein Drehschwingsystem ein cosinus-förmiges Drehmoment[1] $M_0 \cos(\omega t)$, so gehorcht das System der **Bewegungsgleichung**:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos(\omega t) \tag{A2.25}$$

mit der **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \mu := \frac{M_0}{\Theta}. \tag{A2.26}$$

Die mathematische Behandlung dieses Problems kann in eleganter Weise mit Hilfe der komplexen Darstellung der Funktionen durchgeführt werden.

Wir wollen hier zunächst die physikalischen Aspekte in den Vordergrund stellen und die Rechnung rein reell durchführen. Wird ein schwingfähiges System von außen gestört, so löst die Störung eine gedämpfte Schwingung mit der Frequenz $\hat{\omega}$ aus, die sich der eventuell vorhandenen Bewegung überlagert. Wirkt ein äußeres Drehmoment $M_0 \cos(\omega t)$ auf das System, so regt es eine solche gedämpfte Eigenschwingung an. Andererseits zwingt das äußere Drehmoment dem System auch eine Schwingung mit seiner Frequenz ω auf. Es entsteht eine Überlagerung von Bewegungen mit den beiden Frequenzen. Dieser Vorgang wird „Einschwingen“ genannt.

Nach einer Zeit $t > \tau$ ist der gedämpfte Anteil der Bewegung abgeklungen. Es ist ein Zustand erreicht, in dem die Energiezufuhr durch das äußere Drehmoment genau die Reibungsverluste deckt („Stationärer Zustand“). Das System schwingt mit mit konstanter Amplitude bei der Frequenz ω.

Genau dieses Verhalten spiegelt auch die mathematische Behandlung wider: Die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung (Gleichung A2.25) ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Der erste Anteil ist bereits bekannt (siehe Abschnitt A2.2). Da wir uns auf kleine Dämpfungen beschränken, handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung der Gestalt:

$$\varphi_{\text{hom.}}(t) = e^{-\beta t}(a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)). \tag{A2.27}$$

Sie beschreibt zusammen mit dem zweiten Anteil den Einschwingvorgang. Der zweite Anteil ist eine ungedämpfte Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω. Wir machen daher den allgemeinen Ansatz:

$$\varphi_{\text{inhom.}}(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \tag{A2.28}$$

Diese Gleichung beschreibt den stationären Zustand, für den wir uns im Folgenden ausschließlich interessieren. Wir wollen nun die Konstanten c und d so bestimmen, dass die inhomogene

[1] Das ist der Spezialfall einer harmonischen Anregung mit einer Frequenz. Die allgemein periodische, nicht cosförmige Anregung stellt eine Überlagerung solcher Spezialfälle mit verschiedenen Frequenzen dar (Fourier-Zerlegung).

Gleichung erfüllt[2] ist. Einsetzen ergibt:

$$\left[d\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2c\beta\omega\right]\tan(\omega t)=\left[\mu-c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2d\beta\omega\right]. \tag{A2.29}$$

Diese Bedingung ist nur dann für alle Zeiten erfüllt, wenn beide eckige Klammern für sich verschwinden. Daraus errechnen sich die Konstanten zu:

$$d=\frac{2\beta\omega\mu}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2};\qquad c=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\mu}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}. \tag{A2.30}$$

Mit der Abkürzung $N:=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2$ sieht man, dass gilt:

$$\left(d\frac{\sqrt{N}}{\mu}\right)^2+\left(c\frac{\sqrt{N}}{\mu}\right)^2=1. \tag{A2.31}$$

Die beiden Konstanten sind nicht unabhängig voneinander. Sie lassen sich durch eine andere Konstante, den Phasenwinkel α, ausdrücken:

$$d=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\sin(\alpha),\qquad c=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\cos(\alpha). \tag{A2.32}$$

Damit wird

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\left(\cos(\omega t)\cos(\alpha)+\sin(\omega t)\sin(\alpha)\right) \tag{A2.33}$$

oder (Additionstheorem für den Cosinus):

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\alpha) \tag{A2.34}$$

$$\text{mit}\quad \tan(\alpha)=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{A2.35}$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz ω. Sie hat eine Phasenverschiebung α gegen das äußere Drehmoment. Die Ausdrücke für $\varphi(t)$ und $\tan(\alpha)$ lassen sich mit Hilfe der Güte $Q=\omega_0\tau=\omega_0/2\beta$ folgendermaßen umschreiben:

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}}\cos(\omega t-\alpha) \tag{A2.36}$$

$$\text{und}\quad \tan(\alpha)=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{A2.37}$$

[2] Die stationäre Schwingung ist unabhängig von den Anfangsbedingungen. Sie wird vom äußeren Drehmoment $M_0\cos(\omega t)$ erzwungen, womit der Zeitnullpunkt bereits festgelegt ist.

Die **Amplitude**

$$\varphi(\omega) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}} \tag{A2.38}$$

hat einen „Resonanz-Nenner“. Sie ist in Abb. A2.2, oben, als Funktion von ω/ω_0 dargestellt. Die Amplitude wird maximal[3] für den Resonanzfall $\omega = \omega_0$. Sie nimmt dabei einen Wert an, der proportional zur Güte und zur Amplitude des erregenden Drehmoments ist:

$$\varphi\left(\omega = \omega_0\right) = \frac{\mu Q}{\omega_0^2}. \tag{A2.39}$$

Vergleicht man diese Maximalamplitude mit der für $\omega = 0$, so sieht man, dass die Güte auch aus diesen beiden Werten bestimmt werden kann:

$$\varphi(\omega = \omega_0) = Q\varphi(\omega = 0). \tag{A2.40}$$

Für Systeme großer Güte können im Resonanzfall schon kleine periodische Störungen zu sehr großen Amplituden und damit zur Zerstörung des schwingenden Systems führen (Resonanzkatastrophe).

Als Maß für die Breite der Resonanzkurve $\varphi(\omega)$ wählt man üblicherweise den Abstand $\Delta\omega$ der beiden Frequenzen ω_1, für die die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-fache bzw. die gespeicherte Energie auf das 1/2-fache des jeweiligen Wertes bei $\omega = \omega_0$ abgefallen ist:

$$\varphi(\omega_1) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + \frac{\omega_0^2\omega_1^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\frac{\omega_0^2}{Q}} = \frac{\varphi(\omega_0)}{\sqrt{2}}. \tag{A2.41}$$

Für hinreichend hohe Güten liegen ω_1 und ω_0 sehr nahe beieinander. Wir benutzen daher die Näherungen

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = (\omega_0 + \omega_1)(\omega_0 - \omega_1) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega_1) \tag{A2.42}$$

und

$$\omega_0\omega_1 \approx \omega_0^2. \tag{A2.43}$$

Damit folgt: $2(\omega_0 - \omega_1) = \pm\omega_0/Q$ bzw. $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}$. Die „$1/\sqrt{2}$-Wert-Breite“ $\Delta\omega$ der Resonanz-

[3] Das stimmt nur näherungsweise für hinreichend hohe Güten. Die Auswertung der Extremumbedingung $\frac{\mathrm{d}\phi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$ ergibt:

Amplitude(ω)	$\omega_{\max}$
Auslenkung: $\mu/\sqrt{N}$	$\omega_0\sqrt{1 - 1/2Q^2}$
Geschwindigkeit: $\mu\omega/\sqrt{N}$	ω_0

Die Frequenz $\omega_{\max}$ des Maximums der Auslenkungsmplitude bei der erzwungenen Schwingung ist verschieden von der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung! (Vergleichen Sie mit dem Schwingfall der freien Schwingung in Abschnitt A2.2.3).
Dagegen stimmt die Frequenz $\omega_{\max}$ für die Geschwindigkeitsamplitude mit der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung überein. Der Anreger überträgt kinetische Energie auf das schwingfähige System. Der Energieübertrag ist optimal angepasst, wenn die Geschwindigkeitsamplitude bei der Anregungsfrequenz $\omega = \omega_0$ maximal überhöht ist.

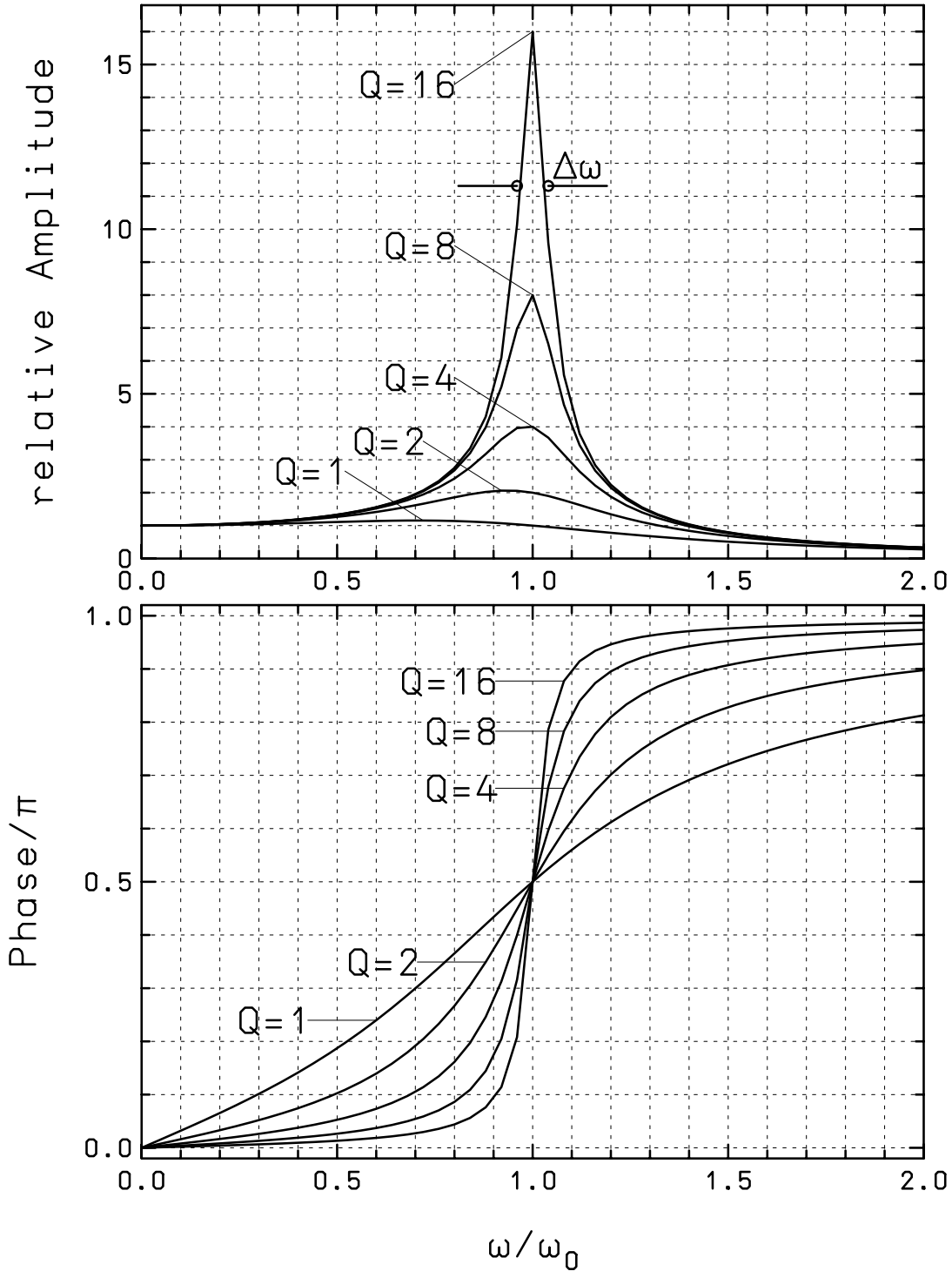


Abbildung A2.2: **Erzwungene Schwingungen:** Amplitude und Phase

kurve ist die volle „Halbwertsbreite“ der Energie-Resonanzkurve:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \tag{A2.44}$$

Breite und Höhe der Resonanzkurve hängen also in umgekehrter Weise von der Güte Q ab. Für hinreichend schwach gedämpfte Systeme kann die Güte aus der Breite $\Delta\omega$ ermittelt werden. Schätzt man mit Hilfe dieses Ergebnisses den Fehler ab, der durch obige Näherung gemacht wird, so erhält man:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(1 + \frac{3}{4Q}\right), \quad \text{d.h. ca. 10\% für } Q = 7,5. \tag{A2.45}$$

Auch die **Phase** der Amplitude zeigt eine charakteristische Abhängigkeit von ω und Q (Abb. A2.2, unten).

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{1}{Q}, \tag{A2.46}$$

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) \simeq \omega/\omega_0 \Rightarrow \alpha \approx 0, \\ \omega = \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) = \infty \Rightarrow \alpha \approx \pi/2, \\ \omega \gg \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) \simeq -\omega_0/\omega \Rightarrow \alpha \approx \pi. \end{aligned} \tag{A2.47}$$

Der Übergang der Phase von Werten nahe 0 zu fast π vollzieht sich in einem Frequenzbereich um ω_0 herum, der von der Größe $\Delta\omega$ ist. Der Übergang ist umso abrupter, je größer Q ist. Für die beiden Werte ω_1 gilt mit der obigen Näherung:

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\frac{1}{Q} \approx \pm 1. \tag{A2.48}$$

Die Phase α ist dann 45° bzw. 135°.

Das Verhalten eines harmonischen Schwingsystems ist also durch seine Eigenfrequenz ω_0 und seine Güte Q völlig beschrieben.

Anhang A3

Oszillograph und Datenaufnahme mit PC

A3.1 Messdatenerfassung mit dem CASSY System

Bei einigen Versuchsaufbauten werden Messreihen automatisiert mit einem Rechner erfasst. Dazu benötigt man einen „Sensor“, der das zu messende Signal in eine Spannung umwandelt, die an den Digitalisierungsbereich des nachgeschalteten Analog/Digitalwandlers (ADC = Analogue to Digical Converter) angepasst ist. Da Ströme vom ADC nicht gewandelt werden, muss ein Strom erst in eine Spannung konvertiert werden (Strom durch Widerstand geleitet ergibt nach dem Ohmschen Gesetz eine Spannung von $U = RI$). Ist die Signalamplitude größer als die erlaubte Eingangsamplitude, muss sie über eine Spannungsteilerschaltung kaskadiert werden. Bei zu geringer Signalamplitude können die Diskretisierungsschritte des ADC stören und es empfiehlt sich, das Signal vor dem ADC analog zu verstärken.

Der ADC erzeugt einen digitalen Datenstrom, der an einen Rechner über Schnittstellen (seriell, USB, ...) geschickt wird. Auf dem Rechner muss ein Programm laufen, welches den ankommenden Datenstrom dekodiert, in physikalisch relevante Größen (d.h. zunächst Spannungen) umrechnet, gegebenenfalls abgeleitete physikalischen Größen (rechnerisch) ermittelt, diese (online) darstellt und in Dateien zur späteren (offline) Verarbeitung speichert. Diese Software kann auch den Messvorgang steuern, d.h. die angeschlossenen Instrumente im vorgegebenen Zeittakt oder auf Tastendruck „auslesen“. Wenn die Vorschaltgeräte Teil des Gesamtsystems sind, dann kann das Mess- und Steuerprogramm die Auswirkungen der Vorschaltgeräte berücksichtigen.

Im Praktikum wird das kommerzielle System CASSY von Leybold-Didactic eingesetzt. Booten des PCs führt direkt zum CASSY-Menu. Die technischen Daten des CASSY-Grundsensors lauten:

- 5 analoge Eingangsbuchsen in 2 Feldern A und B, die gleichzeitig nutzbar sind.
  - **2 analoge Spannungseingänge** in den Feldern A und B.
    Auflösung: 12 bit; Messbereiche: ±(0,3 V, 1 V, 3 V, 1 V, 30 V und 100 V); Messfehler: ±1%, zuzüglich 0.5% vom Bereichsendwert; Eingangswiderstand: 1 MΩ; Abtastrate: bis 100 kHz pro Eingang.
  - **1 analoger Stromeingang** in Feld A;
    Messbereiche: ±(0,1 A, 0,3 A, 1 A und 3 A); Messfehler: Spannungsmessfehler zuzüglich 1%; Eingangswiderstand: <0,5 Ω (außer bei Überlast); weitere Daten siehe Spannungseingänge.

  - 2 analoge Eingänge auf **Sensorbox-Steckplätze**n in den Feldern A und B erlauben Anschluss aller CASSY-Sensorboxen;

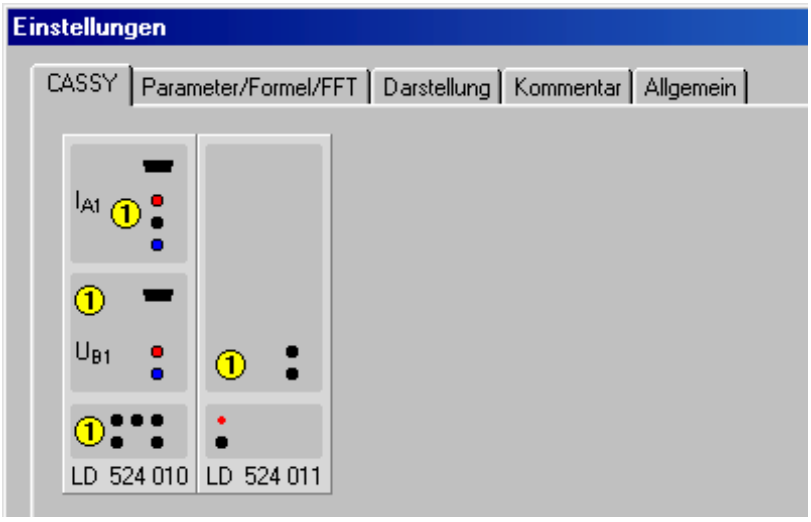
    Messbereiche: ±(0,003 V, 0,01 V, 0,03 V, 0,1 V, 0,3 V und 1 V); Eingangswiderstand: 10 kΩ; Weitere Daten siehe Spannungseingänge; Technische Daten ändern sich entsprechend einer aufgesteckten Sensorbox. Erkennung der dann möglichen Messgrößen und Bereiche automatisch durch CASSY Lab nach Aufstecken einer Sensorbox.

- 1 Umschaltrelais (Schaltanzeige mit LED); Bereich: max. 100 V bzw. 2 A
- 1 analoger Ausgang (PWM-Ausgang), d.h. PulsWeitenModuliert zum Schalten von entsprechenden Geräten (z.B. für Haltemagnet oder Experimentversorgung); PWM-Bereich: 0% (aus), (5 – 95) % (1% Auflösung), 100% (an); PWM-Frequenz: 100 Hz
- 1 USB-Port zum Anschluss eines Computers
- 1 CASSY-Bus zum Anschluss weiterer CASSY-Module
- Abmessungen: 115 mm × 295 mm × 45 mm
- Masse: 1,0 kg

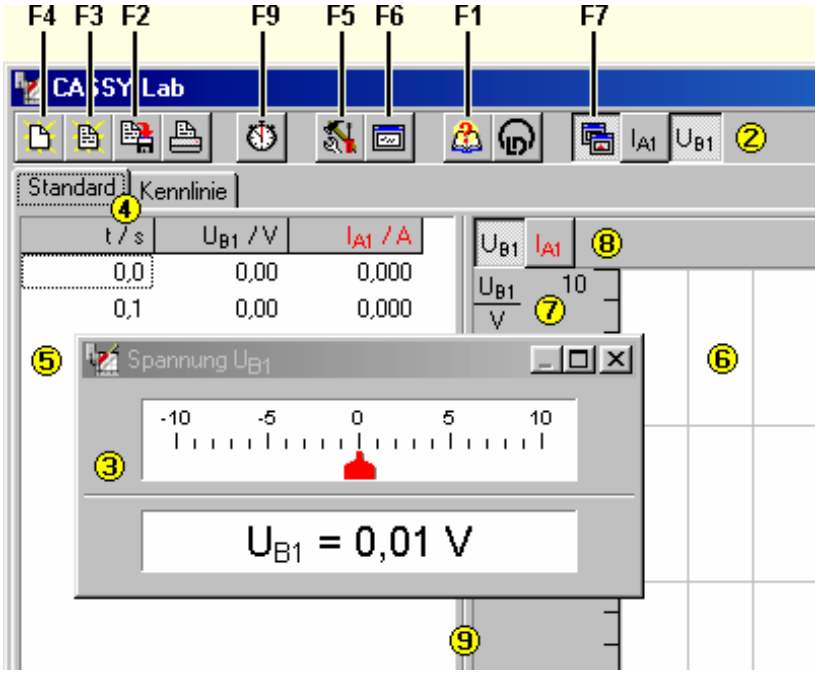
Gegenstück zum ADC sind DAC (Digital to Analogue Converters), die eine rechnergesteuerte Spannungsquelle darstellen. Die entnehmbare Leistung hängt von der Bauweise ab.

Erste Messwerte

Wenn ein oder mehrere CASSYs erkannt worden sind, zeigt die CASSY-Seite des Einstellungsfensters (**F5**) die aktuelle Konfiguration (mit eventuell aufgesteckten Sensorboxen). Um eine Messung durchzuführen, braucht nur der entsprechende Eingang oder Ausgang ① angeklickt zu werden:



Ein aktiver Ein- oder Ausgang (Kanal) wird danach farbig markiert und als Button rechts oben zu den Speed-Buttons ② des Hauptfensters einsortiert (hier I_{A1} und U_{B1}). Diese Buttons stellen die einfachste Möglichkeit dar, ein Anzeigeinstrument ③ des Kanals anzuzeigen oder zu schließen (linke Maustaste) oder seine Einstellungen zu verändern (rechte Maustaste). Außerdem erscheint der Kanal anfangs automatisch in der Tabelle ⑤ und im Diagramm ⑥.



Die grundsätzlichen Funktionen lassen sich gezielt mit den Speed-Buttons ② in der oberen Zeile ausführen. Die wichtigsten Speed-Buttons lassen sich auch mit den Funktionstasten bedienen.

Darunter lässt sich durch Anklicken einer der Darstellungsseiten ④ die Darstellung der Tabelle ⑤ und des Diagramms ⑥ umschalten, wenn unterschiedliche Darstellungsarten definiert wurden (hier **Standard** und **Kennlinie**). Tabelle und Diagramm können gegeneinander durch Verschieben der Trennlinie ⑨ mit der Maus vergrößert oder verkleinert werden.

An vielen Stellen haben **beide** Maustasten (links und rechts) eine entscheidende Funktion:

Bedienelement	**Linke Maustaste**	**Rechte Maustaste**
① CASSY-Anordnung	Anschalten und Ändern eines Kanals	Anschalten und Ändern eines Kanals
② Kanal-Button	Öffnen und Schließen des Anzeigeinstruments, Drag & Drop nach ② und ⑤ bis ⑧	Einstellungen des Kanals
③ Anzeigeinstrument	Verschieben der Trennlinie Analog- zu Digitalanzeige, Drag & Drop der Werte nach ⑤	Einstellungen des Kanals
④ Name der Darstellung	Umschalten in eine andere definierte Darstellung	
⑤ Tabelle	Editieren von Messwerten, Drag & Drop der Werte innerhalb der Tabelle oder der Kanäle nach ②	Darstellung der Tabelle, z. B. Schriftgröße, Löschen von Zeilen und Messreihen
⑥ Diagramm	Markieren von Auswertungsbereichen	Einstellungen und Auswertungen im Diagramm
⑦ Skala	Verschieben der Skala	Minimum, Maximum und Umrechnung der Skala festlegen
⑧ Achsensymbole	Umschalten der y-Skala, Drag & Drop nach ②	Einstellungen des Kanals
⑨ Trennlinie	Verschieben der Trennlinie Tabelle zu Diagramm	

Auch die Tastenbelegung der Speed-Buttons erleichtert oft die Arbeit:

F4

Löscht entweder die aktuelle Messung unter Beibehaltung ihrer Einstellungen oder, wenn keine Messung vorhanden ist, die aktuellen Einstellungen.

Eine zweimalige Anwendung löscht eine Messung mit ihren Einstellungen.

F3

Lädt eine Messreihe mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen.

Dabei kann die Messreihe auch an eine vorhandene Messreihe angehängt werden (ohne ihre Einstellungen und Auswertungen mit zu laden). Dies ist möglich, wenn die Messreihen die gleichen Messgrößen besitzen. Alternativ kann eine weitere Messreihe auch nachträglich gemessen und angehängt werden.

Außerdem steht ein ASCII-Import-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung.

F2

Speichert die aktuellen Messreihen mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen ab.

Es lassen sich auch reine Einstellungen (ohne Messdaten) abspeichern, mit denen dann später ein Experiment einfach wiederholt werden kann.

Außerdem steht ein ASCII-Export-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung. Aber auch die CASSY Lab-Dateien (Dateityp ***.lab**) sind mit jedem Texteditor lesbar.

Druckt die aktuelle Tabelle oder das aktuelle Diagramm aus.

F9

Startet und stoppt eine neue Messung.

Alternativ kann die Messung durch die Vorgabe einer Messzeit gestoppt werden.

F5

Ändert die aktuellen Einstellungen (z. B. CASSY, Parameter/Formel/FFT, Darstellung, Kommentar, Serielle Schnittstelle). Für die Messparameter muss diese Funktion **doppelt** betätigt werden.

F6

Stellt den Inhalt der Statuszeile groß dar oder blendet ihn wieder aus.

F1

Ruft diese Hilfe auf.

Gibt Auskunft über die Version der Software und ermöglicht die Eingabe des Freischaltcodes.

F7

Schließt alle geöffneten Anzeigeinstrumente oder öffnet sie wieder.

ASCII-Export und Import

Wählt man im Dateiauswahlfenster als Dateityp ***.txt**, dann ist bequem der Export- und Import von ASCII-Dateien möglich.

Das Datenformat beginnt mit einem Header, in dem alle Zeilen wiederum mit einem Schlüsselwort beginnen. Dadurch werden Messbereiche (MIN, MAX), Skalierungen (SCALE), Anzahl signifikanter Nachkommastellen (DEC) und die eigentliche Definition der Messgrößen (DEF) festgelegt. Bis auf die DEF-Zeile sind alle Zeilen optional. Nach dem Header folgt die eigentliche Messwerttabelle.

Die genaue Syntax ist z. B. der Datei anzusehen, die bei einem Datenexport entsteht.

Statuszeile

In die Statuszeile am unteren Bildschirmrand werden Auswertungsergebnisse eingetragen. Diese Ergebnisse lassen sich durch Drücken von oder **F6** auch in einem größeren Fenster darstellen bzw. wieder ausblenden.

Drag & Drop

Die Auswertungsergebnisse der Statuszeile lassen sich mit der Maus in die Tabelle ziehen (Drag & Drop). Auf diese Weise lassen sich Diagramme erstellen, die von Auswertungsergebnissen abhängen.

© Leybold-Didactic GmbH

A3.2 Bedienung des Oszillographen Hameg HM303-6

Inbetriebnahme und Voreinstellungen

Gerät an Netz anschließen, Netztaste (oben rechts neben Bildschirm) drücken.
Leuchtdiode zeigt Betriebszustand an.
Gehäuse, Chassis und Meßbuchsen-Massen sind mit dem Netzschutzleiter verbunden (Schutzklasse I).
Keine weitere Taste drücken. **TRIG. MODE**-Wahlschalter auf **AC**.
AT/NM-Taste nicht gedrückt. Eingangskopplungsschalter **CHI** auf **GD**.
Am Knopf **INTENS** mittlere Helligkeit einstellen.
Mit den Knöpfen **Y-POS.I** und **X-POS.** Zeitlinie auf Bildschirmmitte bringen.
Anschließend mit **FOCUS**-Knopf Zeitlinie scharf einstellen.

Betriebsart Vertikalverstärker

Kanal I: Tasten **CHI/II**, **DUAL** und **ADD** herausstehend.
Kanal II: Taste **CHI/II** gedrückt.
Kanal I und II: Taste **DUAL** gedrückt. Alternierende Kanalumschaltung: Taste ADD (**CHOP.**) nicht drücken.
Chopper-Kanalumschaltung: Taste ADD (**CHOP.**) drücken.
(Nur bei Signalen <1kHz oder Zeitkoeffizienten ≥1ms/cm mit gedrückter Taste ADD (**CHOP.**) arbeiten)
Kanäle I+II (Summe): Nur Taste **ADD** drücken.
Kanäle +I–II (Differenz): Taste **ADD** und die Taste **INV.** drücken.

Betriebsart Triggerung

Triggerart mit Taste **AT/NM** wählen:
AT = Automatische Spitzenwert-Triggerung >20Hz-100MHz (ungedrückt).
NM = Normaltriggerung (gedrückt).
Trigger-Flankenrichtung: mit Taste **SLOPE** wählen.
Interne Triggerung: Kanal wird mit Taste **TRIG.I/II** (**CHI/II**) gewählt.
Interne alternierende Triggerung: **DUAL** und Taste **ALT.** drücken. ADD (**CHOP.**) darf nicht gedrückt sein.
Externe Triggerung (autom. Triggerung): Taste **TRIG. EXT.** drücken; Synchron-Signal (0,3Vss - 3Vss) an Buchse **TRIG. EXT.** legen.
Netztriggerung (Normaltriggerung): **TRIG. MODE**-Drucktasten **AT/NM** und **ALT** drücken (**~**).
Triggerkopplung mit **TRIG. MODE**-Wahlschalter **AC** - **DC** - **LF** - **TV** wählen. Frequenzbereiche der Triggerkopplung:
AC: >10Hz bis 100MHz; **DC**: 0 bis 100MHz; **LF**: 0 bis 1,5kHz.
TV für Synchronimpulsabtrennung von Videosignalen
TIME/DIV.-Schalter von **0,5ms/div.** bis **0,1µs/div.** = Zeilensynchronimpulse
TIME/DIV.-Schalter von **0,2s/div.** bis **1ms/div.** = Bildsynchronimpulse
Dabei richtige Flankenrichtung mit Taste **SLOPE** wählen
(Synchronimpuls oben entspricht **/**, unten entspricht ****).
Triggeranzeige beachten: **TR** LED oberhalb **SLOPE**-Taste.

Messung

Meßsignal den Vertikal-Eingangsbuchsen von **CHI** und/oder **CHII** zuführen.
Tastteiler vorher mit eingebautem **CALIBRATOR** -Signal abgleichen.
Meßsignal-Ankopplung auf **AC** oder **DC** schalten.
Mit Teilerschalter **(VOLTS/DIV.)** Signal auf gewünschte Bildhöhe einstellen.
Am **TIME/DIV.**-Schalter Zeitkoeffizienten wählen.
Triggerpunkt mit **LEVEL**-Knopf einstellen (bei Normaltriggerung).
Bei hoher Vertikalempfindlichkeit (1mV/div.), entspr. Meß-Freq./-Aufgabe, LF-Triggerfilter wählen.
Komplexe oder aperiodische Signale evtl. mit vergrößerter **HOLD OFF**-Zeit triggern.
Amplitudenmessung mit Y-Feinsteller auf Rechtsanschlag **CAL**.
Zeitmessung mit Zeit-Feinsteller auf Rechtsanschlag **CAL**.
X-Dehnung x10: Taste **X-MAG. x10** drücken (bei XY unwirksam).
Externe Horizontalablenkung (***XY-Betrieb***) mit gedrückter Taste **XY** (X-Eingang: **CHI**).

Komponenten-Test

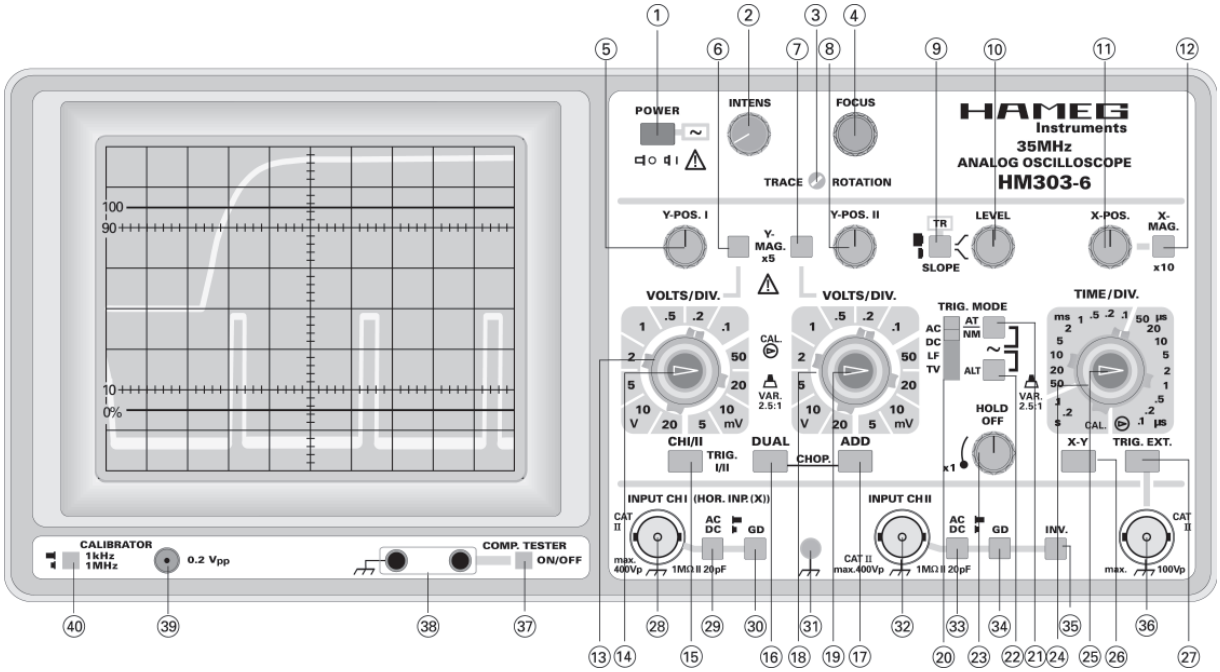
COMP. TESTER-Taste drücken. Bauteil zweipolig an **COMP. TESTER**-Buchsen anschließen.
Test in der Schaltung: Schaltung spannungsfrei und massefrei (erdfrei) machen. Netzstecker der zu testenden Schaltung ziehen, Verbindungen mit HM303-6 lösen (Kabel, Tastteiler), X-MAG.-Taste ausrasten (X1), dann erst testen.

Element	*Funktion*
① **POWER** (Taste + LED-Anzeige)	Netz Ein/Aus; Leuchtdiode zeigt Betriebszustand an.
② **INTENS** (Drehknopf)	Helligkeitseinstellung für den Kathodenstrahl
③ **TRACE ROTATION** Trimmpotentiometer (Einstellung mit Schraubenzieher)	Trace Rotation (Strahldrehung). Dient zur Kompensation des Erdmagnetfeldes. Der horizontale Strahl wird damit parallel zum Raster gestellt
④ **FOCUS** (Drehknopf)	Schärfeeinstellung für den Kathodenstrahl.
⑤ **Y-POS. I** (Drehknopf)	Einstellung der vertikalen Position des Strahles für Kanal I. Im XY-Betrieb außer Funktion.
⑥ **Y-MAG.x5** (Drucktaste)	Erhöht die Y-Verstärkung von Kanal I um den Faktor 5. (Maximal 1mV/cm).
⑦ **Y-MAG.x5** (Drucktaste)	Erhöht die Y-Verstärkung von Kanal II um den Faktor 5. (Maximal 1mV/cm).
⑧ **Y-POS. II** (Drehknopf)	Einstellung der vertikalen Position des Strahles für Kanal II.
⑨ **SLOPE** ⎍ (Drucktaste)	Wahl der Triggerflanke. Taste nicht gedrückt: ansteigend, Taste gedrückt: fallend.
TR (LED-Anzeige)	Anzeige leuchtet, wenn Zeitbasis getriggert wird.
⑩ **LEVEL** (Drehknopf)	Triggerpegel-Einstellung
⑪ **X-POS.** (Drehknopf)	Strahlverschiebung in horizontaler Richtung
⑫ **X-MAG. x10** (Drucktaste)	Dehnung der X-Achse um den Faktor 10. Max. Auflösung 10ns/div. Im XY-Betrieb außer Funktion.
⑬ **VOLTS/DIV.** (12stufig. Drehschalter)	Eingangsteiler für Kanal I. Bestimmt die Y-Ablenkkoeffizienten in 1-2-5 Schritten und gibt den Umrechnungsfaktor an (V/div, mV/div).
⑭ **VAR.** (Drehknopf)	Feineinstellung der Y-Amplitude (Kanal I). Vermindert die Verstärkung max. um den Faktor 2,5. Kalibrierung am Rechtsanschlag (Pfeil nach rechts zeigend).
⑮ **CH I/II-TRIG. I/II** (Drucktaste)	Keine Taste gedrückt: Kanal I-Betrieb und Triggerung von Kanal I. Taste gedrückt: Kanal II-Betrieb und Triggerung von Kanal II. (Triggerumschaltung bei DUAL-Betr.).

Element	*Funktion*
⑯ **DUAL** (Drucktaste)	Taste nicht gedrückt: Einkanalbetrieb. Taste DUAL gedrückt: Zweikanalbetrieb mit alternierender Umschaltung.
CHOP.	DUAL und ADD gedrückt: Zweikanalbetrieb mit Chopper-Umschaltung.
⑰ **ADD** (Drucktaste)	ADD allein gedrückt: Algebr. Addition. In Kombination mit INV. Taste: Differenzbetrieb.
⑱ **VOLTS/DIV.** (12stufig. Drehschalter)	Eingangsteiler für Kanal II. Bestimmt die Y-Ablenkkoeffizienten in 1-2-5 Schritten und gibt den Umrechnungsfaktor an (V/div, mV/div).
⑲ **VAR.** (Drehknopf)	Feineinstellung der Y-Amplitude (Kanal II). Vermindert die Verstärkung max. um den Faktor 2,5. Kalibrierung am Rechtsanschlag (Pfeil nach rechts zeigend).
⑳ **TRIG. MODE** (Schiebeschalter) AC-DC-LF-TV	Wahl der Triggerankopplung: **AC**: 10Hz–100MHz. **DC**: 0–100MHz. **LF**: 0–1,5kHz. **TV:** Triggerung für Bild und Zeile.
㉑ **AT/NM** (Drucktaste)	Taste nicht gedrückt: Zeitlinie auch ohne Signal sichtbar, Triggerung autom. Taste gedrückt: Zeitlinie nur mit Signal, Normaltriggerung mit LEVEL
~	**AT/NM** und **ALT** gedrückt: Triggerung mit Netzfrequenz, dabei Normaltriggerung.
㉒ **ALT** (Drucktaste)	Die Triggerung wird im alternierenden DUAL-Betrieb abwechselnd von Kanal I und II ausgelöst.
㉓ **HOLD OFF** (Drehknopf)	Verlängerung der Holdoff-Zeit zwischen den Ablenkperioden. Grundstellung = Linksanschlag.
㉔ **TIME/DIV**. (20stufiger Drehschalter)	Bestimmt Zeitkoeffizienten (Zeitablenkgeschwindigkeit) der Zeitbasis von 0.2s/cm bis 0.1µs/cm.
㉕ **Variable Zeitbasiseinstellung** (Drehknopf)	Feineinstellung der Zeitbasis. Vermindert Zeitablenkgeschwindigkeit max. 2,5fach (Linksanschlag). Cal.-Stellung am Rechtsanschlag (Pfeil nach rechts).
㉖ **XY** (Drucktaste)	Umschaltung auf XY-Betrieb. Zuführung der horiz. Ablenkspannung über den Eingang von Kanal I. ***Achtung! Bei fehlender Ablenkung Einbrenngefahr.***
㉗ **TRIG. EXT.** (Drucktaste)	Umschaltung auf externe Triggerung. Signalzuführung über BNC-Buchse TRIG. EXT.

Element	*Funktion*
㉘ **INPUT CH I** (BNC-Buchse)	Signaleingang Kanal I und Eingang für Horizontalablenkung im XY-Betrieb. Eingangsimpedanz 1MΩ II 20pF.
㉙ **AC⎓DC** (Drucktaste)	Taste für die Eingangssignalankopplung von Kanal I. Taste gedrückt: direkte Ankopplung; Taste nicht gedrückt: Ankopplung über einen Kondensator.
㉚ **GD** (Drucktaste)	GD-Taste gedrückt: Eingang vom Signal getrennt, Verstärker an Masse geschaltet.
㉛ ⏚ (4mm Buchse)	Meßbezugspotentialanschluß, galvanisch mit Netzschutzleiter verbunden.
㉜ **INPUT CH II** (BNC-Buchse)	Signaleingang Kanal II. Eingangsimpedanz 1MΩ II 20pF.
㉝ **AC⎓DC** (Drucktasten)	Tasten für die Eingangssignal-ankopplung von Kanal II. Taste gedrückt: direkte Ankopplung; Taste nicht gedrückt: Ankopplung über einen Kondensator.

Element	*Funktion*
㉞ **GD** (Drucktaste)	GD-Taste gedrückt: Eingang vom Signal getrennt, Verstärker an Masse geschaltet.
㉟ **INV.** (Drucktaste)	Invertierung von Kanal II. In Verbindung mit gedrückter ADD-Taste = Differenzdarstellung.
㊱ **TRIG. EXT.** (BNC-Buchse)	Eingang für externes Triggersignal. Taste TRIG. EXT. gedrückt.
㊲ **COMP. TESTER** (Drucktaste)	Einschaltung des Componenten-Testers; ON = ein, OFF = aus. X-MAG.-Taste ausgerastet
㊳ **COMP. TESTER** (4mm Buchsen)	Anschluß der Testkabel für den Componenten-Tester. Linke Buchse galvanisch mit Netzschutzleiter verbunden.
㊴ **0.2Vpp** (Buchse)	Ausgang des Rechteck-Kalibrators 0,2Vss.
㊵ **CALIBRATOR 1kHz / 1MHz** (Drucktaste)	Frequenz des Kalibrator-Ausgangs. Taste nicht gedrückt: ca. 1kHz, Taste gedrückt: ca. 1MHz.



© Hameg Instruments GmbH

Anhang A4

Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm

Für die Darstellung und Berechnung von Wechselstromkreisen sind sogenannte Zeigerdiagramme sehr von Nutzen. Dies sind instruktive grafische Darstellungen der Momentanwerte der zeitabhängigen Größen Spannung und Strom einerseits sowie der linearen Netzwerke aus Ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten durch zweidimensionale Vektoren („Zeiger"). Diese Zeiger lassen sich als Darstellungen komplexer Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene auffassen. Spannungen und Ströme werden durch die zeitabhängigen komplexen Zahlen $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ beschrieben. Deren Realteile liefern die beobachtbaren sinusförmigen Verläufe. Impedanzen von linearen Netzwerken sind zeitunabhängige komplexe Zahlen.

A4.1 Zusammenhang von Strom und Spannung in linearen Netzwerken aus Ohmschem Widerstand, Kondensator und Spule

a) **Ohmscher Widerstand** (Abb. A4.1a)

Legt man an einen Ohmschen Widerstand R eine cosinusförmige Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ an, so fließt der Strom $I = I_0 \cos(\omega t)$ mit $I_0 = U_0/R$. Die Scheitelwerte U_0, I_0 von Strom und Spannung sind einander proportional, und **die zeitlichen Phasenlagen beider sind gleich.**

b) **Kapazität (Kondensator)** (Abb. A4.1b)

Ein Kondensator der Kapazität C trägt die Ladung $Q = CU$. Mit $U = U_0 \cos(\omega t)$ und $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ folgt $I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\omega C U_0 \sin(\omega t)$. Dies formen wir um zu $I = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ mit $I_0 = \omega C U_0$. Wie beim Ohmschen Widerstand sind die Scheitelwerte von Strom und Spannung einander proportional, aber **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode nach.** Die frequenzabhängige Größe

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

spielt die Rolle eines Widerstandes und wird als **Wechselstromwiderstand einer Kapazität** bezeichnet. Ein Kondensator hat also bei niedrigen Frequenzen einen großen, bei hohen einen kleinen Wechselstromwiderstand.

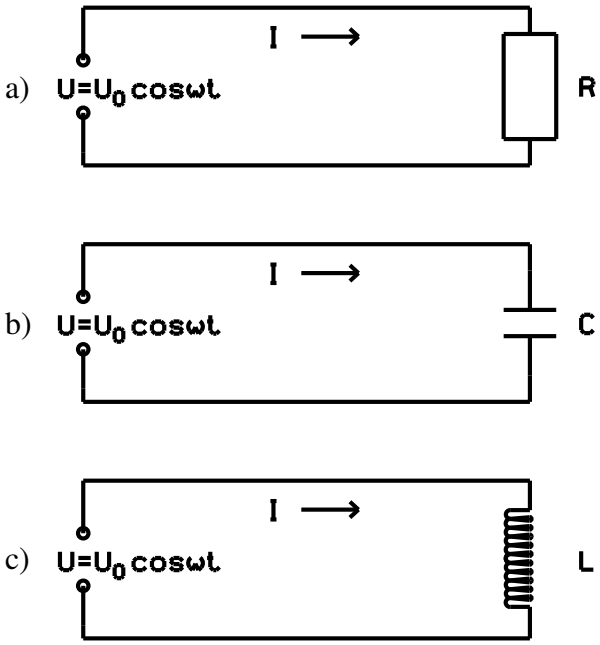


Abbildung A4.1: Netzmaschen für ideale Impedanzen.

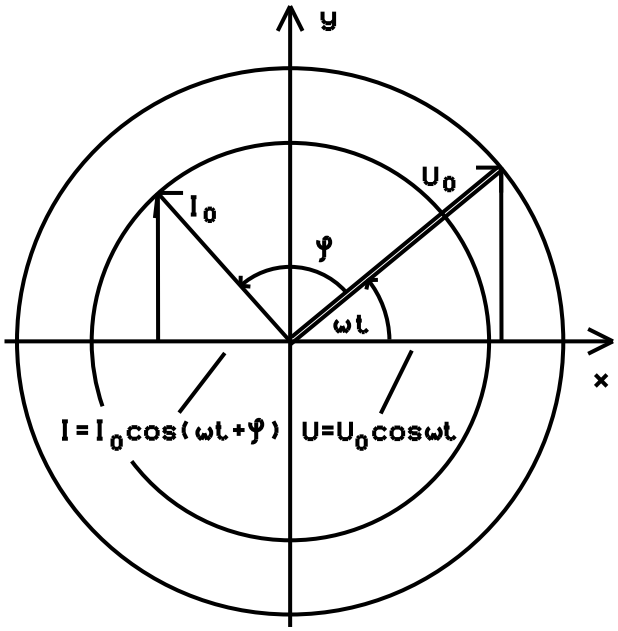


Abbildung A4.2: Prinzip des Zeigerdiagramms.

c) **Induktivität (widerstandslose Spule)** (Abb. A4.1c)

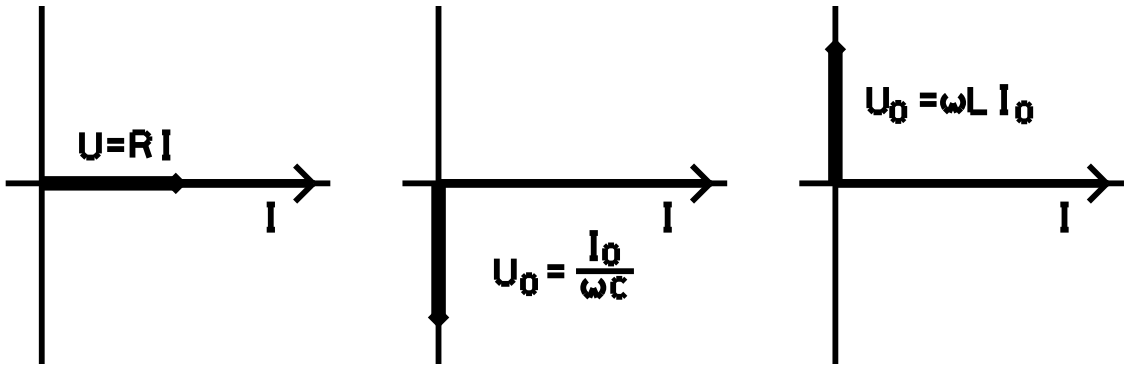
Der durch eine Spule fließende Strom I erzeugt in ihrer Windungsfläche den magnetischen Fluss $\Phi = LI$. Der Faktor L heißt die Induktivität der Spule. Ist I zeitabhängig, so wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ induziert. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die Summe der Spannungen im Kreis $U + U_{\text{ind}} = RI$, und wenn wir $R = 0$ setzen (ideale widerstandslose Spule), folgt $U = +L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Dies können wir für $U = U_0 \cos(\omega t)$ durch $I = U_0/(\omega L)\sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$ mit $I_0 = U_0/(\omega L)$ erfüllen.
Die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind einander proportional, **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor**. Der **Wechselstromwiderstand einer Induktivität**

$$Z_L = \omega L$$

steigt proportional zur Frequenz an.

A4.2 Zeigerdiagramme

Das Zeigerdiagramm bildet ein bequemes und anschauliches Mittel zur Darstellung und Berechnung der Beziehung zwischen Strom und Spannung in Serien- und Parallelschaltungen (sog. linearen Netzwerken). In linearen Netzwerken besteht einerseits **Proportionalität** zwischen einer anliegenden cosinusförmigen Wechselspannung und dem resultierenden Strom, andererseits besteht zwischen Spannung und Strom eine feste, i.a. jedoch von Null verschiedene **Phasenverschiebung**.



a) b) c)

Abbildung A4.3: Zeigerdiagramm a) des Ohmschen Widerstands, b) der Kapazität, c) der Induktivität. Gezeichnet ist jeweils das Zeigerdiagramm für den Zeitpunkt, in dem I seinen Scheitelwert I_0 annimmt.

Man stellt die Beziehungen zwischen Beträgen und Phasen der Ströme und Spannungen im **Zeigerdiagramm** dar (siehe Abb. A4.2), indem man U und I in der xy-Ebene durch Zeiger der Länge U_0 bzw. I_0 repräsentiert. (Da U und I in verschiedenen Einheiten gemessen werden, kann für jede der beiden Größen zeichnerisch zunächst ein beliebiger Maßstab gewählt werden. Die Längen verschiedener Stromzeiger (bzw. verschiedener Spannungszeiger) müssen sich jedoch untereinander verhalten wie die zugehörigen Scheitelwerte (Amplituden).) Diese Zeiger rotieren mit der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn. Der von der positiven x-Achse linksherum (im Bogenmaß) zum Zeiger gemessene Winkel stellt die jeweilige momentane Phase dar. Die Projektion des Zeigers auf die x-Achse gibt dann den zugehörigen Momentanwert von Strom bzw. Spannung an. Haben U und I eine feste Phasenverschiebung relativ zueinander, dann bilden die entsprechenden Zeiger ein in sich starres, gleichmäßig rotierendes Gerüst. Für die Darstellung der **relativen** Phasen- und Amplitudenbeziehungen ist es daher gleichgültig, für welchen Zeitpunkt das Zeigerdiagramm gezeichnet wird.

Die in Abschnitt A4.1 hergeleiteten Zusammenhänge zwischen U und I stellen sich im Zeigerdiagramm (Abb. A4.3) folgendermaßen dar:

a) **Ohmscher Widerstand** (Abb. A4.3a):

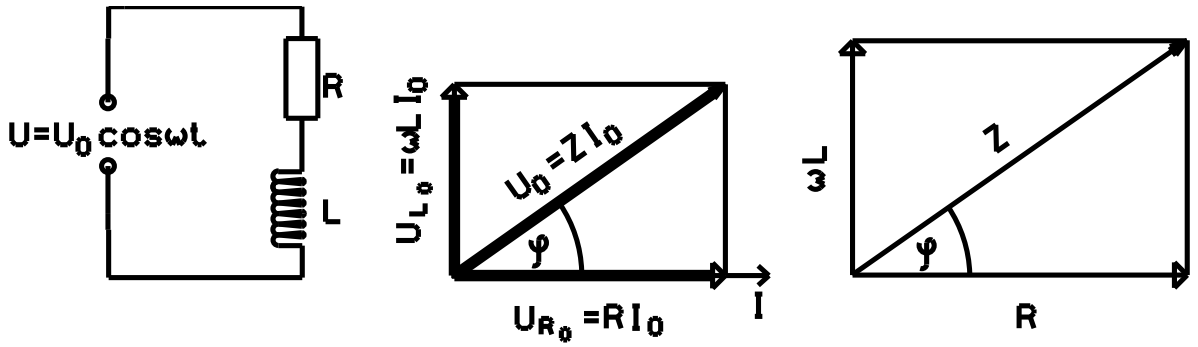
   Strom- und Spannungszeiger sind parallel. Der Spannungszeiger ist R-mal so lang wie der Stromzeiger (in den jeweiligen, zeichnerisch beliebigen Einheiten).

b) **Kapazität** (Abb. A4.3b):

   Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **nach**eilt, also z.B. nach unten zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_C = 1/\omega C$ mal so lang wie der Stromzeiger.

c) **Induktivität** (Abb. A4.3c):

   Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **vor**eilt, also z.B. nach oben zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_L = \omega L$ mal so lang wie der Stromzeiger.



a) Schaltung b) Spannungs-Zeigerdiagramm c) Impedanz-Zeigerdiagramm

Abbildung A4.4: Beispiel einer Serienschaltung: R und L in Serie (reale Spule).

A4.2.1 Serienschaltung

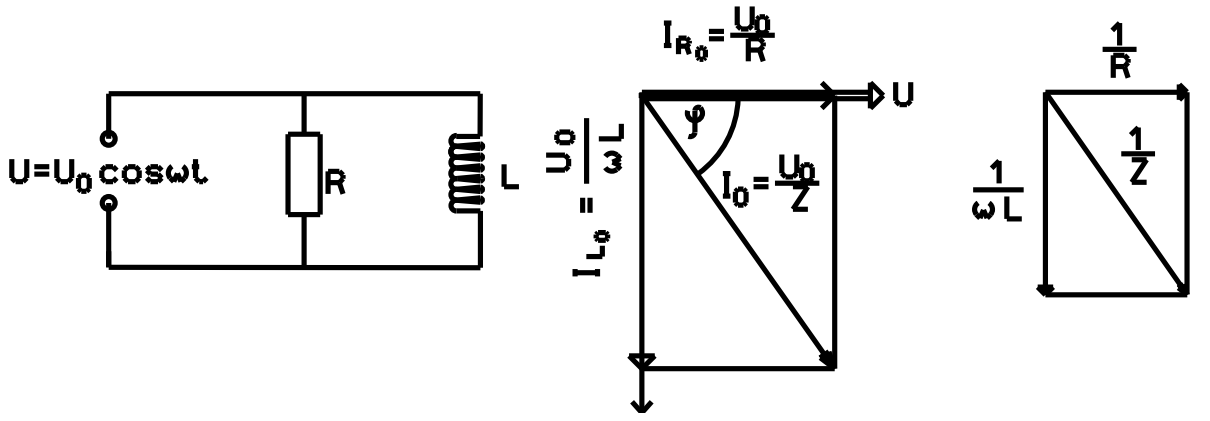
Durch alle Elemente einer Serienschaltung fließt derselbe Strom nach Betrag und Phase (sonst müßten sich auf den Leitungen Ladungen zeitweise ansammeln oder von dort verschwinden). Wir können also in **ein** Diagramm den gemeinsamen Stromzeiger und die Spannungszeiger der einzelnen Elemente, deren Relation zum Stromzeiger wir kennengelernt haben, eintragen. Die über alle in Reihe liegenden Elemente insgesamt abfallende momentane Spannung ist die Summe der Projektionen der einzelnen Spannungszeiger auf die x-Achse. Selbstverständlich dürfen nur gleichartige Größen summiert werden, z.B. Ströme nur zu Strömen. Da die Summe der Projektionen der Zeiger gleich der Projektion ihrer Vektorsumme ist, und zwar für alle ωt, gibt der Summenzeiger nach Länge und Orientierung den Betrag der gesamten Spannung und ihre Phase relativ zum Stromzeiger an. Mit dem ganzen Zeigergerüst rotiert auch der Zeiger der Gesamtspannung gleichmäßig linksherum. Das Diagramm zeigt jeweils einen beliebig herausgegriffenen Augenblick dieser Bewegung (im Beispiel der Abb. A4.4 den Moment, wenn I seinen Scheitelwert I_0 annimmt).

Da die Zeiger der Teilspannungen dem Betrage nach sämtlich proportional zu I_0 sind, gilt dies auch für den Betrag des Summenvektors:

$$|U| = U_0 = ZI_0.$$

Z ist der Wechselstromwiderstand der gesamten Reihenschaltung. Z und der Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom lassen sich aus dem Zeigerdiagramm mit Hilfe einfacher trigonometrischer Beziehungen berechnen.

Teilen wir alle Spannungszeiger durch I_0, so erhalten wir das dem Spannungszeigerdiagramm geometrisch ähnliche **Zeigerdiagramm der Wechselstromwiderstände**. Wir lesen aus Abb. A4.4 ab: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und $\tan(\varphi) = \omega L/R$. Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus. Die Teilspannungen an R und L sind beide weder miteinander noch mit der gesamten Spannung in Phase.



a) Schaltung b) Strom-Zeigerdiagramm c) Leitwert-Zeigerdiagramm

Abbildung A4.5: Beispiel einer Parallelschaltung: Ohmscher Widerstand und Spule.

A4.2.2 Parallelschaltung

An allen parallelen Zweigen der Schaltung liegt dieselbe Spannung an. Man kann daher in **ein** Diagramm den gemeinsamen Spannungszeiger und die Stromzeiger der einzelnen Zweige eintragen. Der Zeiger des insgesamt fließenden Stroms ergibt sich durch vektorielle Addition dieser Stromzeiger und liegt damit nach Betrag und Phase relativ zum Spannungszeiger fest.

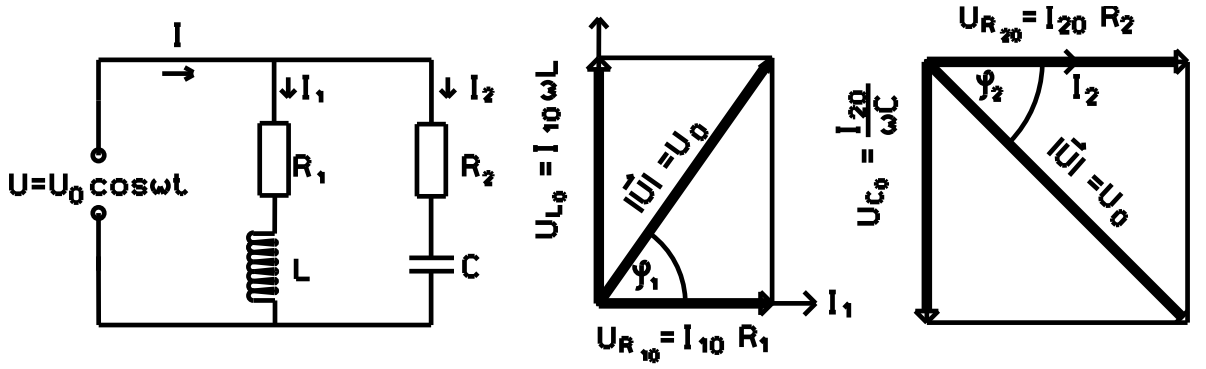
Dem Stromzeigerdiagramm in Abb. A4.5 geometrisch ähnlich ist das **Zeigerdiagramm der Wechselstromleitwerte**, das aus ihm mittels Division durch U_0 hervorgeht. Aus Abb. A4.5 ergeben sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \tan(\varphi) = \frac{R}{\omega L}.$$

Wiederum sind die Teilströme weder untereinander noch mit dem Gesamtstrom in Phase.

A4.3 Komplizierte Netzwerke

Besteht ein Netzwerk aus Parallel- und/oder Reihenschaltungen von Unterabschnitten, die ihrerseits wieder Parallel- und/oder Reihenschaltung der drei Grund-Schaltelemente sind, so muss man zunächst Zeigerdiagramme solcher Unterabschnitte konstruieren und an ihnen die Beziehungen zwischen den zugehörigen Teilspannungen und -strömen ermitteln. Die hierbei im jeweiligen Diagramm vorzugebenden Größen (bei Reihenschaltung der Strom, bei Parallelschaltung die Spannung) sind vorläufig nach Betrag und Phase relativ zu der die ganze Schaltung treibenden Spannung noch unbekannt. Die Maßstäbe dieser Teildiagramme sind zunächst beliebig und deshalb im Allgemeinen verschieden, und auch die dargestellten Zeitpunkte stimmen i.A. nicht überein. Diese Teildiagramme sind nun zum Gesamtdiagramm zusammenzufügen, wobei sie so gedreht (Transformation des Zeitpunkts) und im Maßstab verändert werden müssen, dass durch alle miteinander in Reihe liegenden Teildiagramme derselbe Strom nach Betrag und Phase fließt und an



a) Schaltung b) Spannungsdiagramm Zweig 1 c) Spannungsdiagramm Zweig 2

Abbildung A4.6: Schwingkreis mit Spule, Ohmschen Widerstand und Kondensator

allen parallel liegenden Teilzweigen dieselbe Spannung liegt.

Am Beispiel eines Parallelschwingkreises mit zwei Ohmschen Widerständen soll das verdeutlicht werden: Beide Diagramme in Abb. A4.6 b),c) müssen so gedreht und maßstäblich angepasst werden, dass die Zeiger $\vec{U}$ zur Deckung kommen, da an beiden Zweigen dieselbe Spannung anliegt. Dabei ergibt sich automatisch die relative Lage und Größe von I_1, I_2 und auch der Zeiger des gesamten Stroms $\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$. Wegen der rechten Winkel in den Teildiagrammen liegen die Eckpunkte auf einem Thaleskreis vom Durchmesser U_0. Mittels trigonometrischer Formeln können I_1, I_2 und deren Phasenwinkel bestimmt werden (Abb. A4.7).

A4.4 Komplexe Wechselstromgrößen

A4.4.1 Rechnerische Behandlung von Impedanz-Netzwerken

Der grafischen Darstellung im Zeigerdiagramm entspricht rechnerisch die Darstellung von Strömen, Spannungen und Wechselstromwiderständen durch komplexe Zahlen $z = x + iy$ (Punkte in der komplexen Zahlenebene). Hierbei ist das i das Symbol für $\sqrt{-1}$. (In der elektrotechnischen Literatur schreibt man wegen der häufigen Verwendung des kleinen Buchstabens i zur Bezeichnung von Strömen meist $j = \sqrt{-1}$).

Aus der Beziehung $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ folgt $|e^{i\omega t}| = 1$, d.h. der Vektor vom Ursprung der Zahlenebene zum Punkt $e^{i\omega t} = (\cos\omega t, \sin(\omega t))$ hat die Länge 1 und bildet mit der x-Achse (reellen Achse) den Winkel ωt. Mit wachsendem ωt läuft der Punkt $e^{i\omega t}$ im negativen Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis um. Entsprechend läuft $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf dem Kreis vom Radius U_0 um, wobei die Projektion auf die x-Achse (der Realteil $Re\hat{U}$) gleich $U_0\cos(\omega t)$ ist.

Betrachten wir nun Strom und Spannung an einer Kapazität (Abb. A4.3b)). Fassen wir die Spannung $U = U_0\cos(\omega t)$ als Realteil von $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf, so ergibt sich I als $I = U_0\omega C\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, was wir als Realteil von $\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t+\pi/2)} = \omega C e^{i\pi/2} U_0 e^{i\omega t}$ deuten können. Mit $e^{i\pi/2} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$ wird daraus

$$\hat{I} = i\omega C\hat{U}.$$

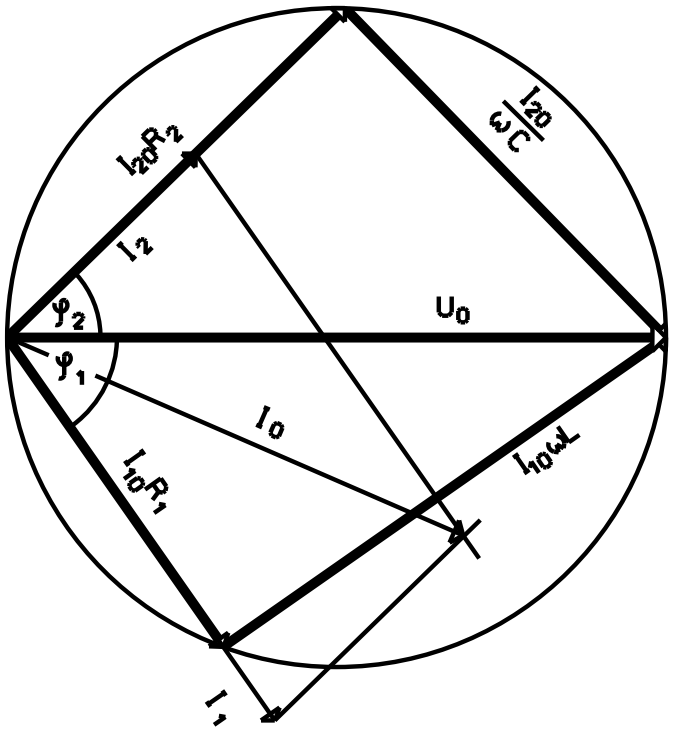


Abbildung A4.7: Zeigerdiagramm für Parallelschwingkreis

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung am Kondensator lässt sich also als **Realteil einer Gleichung zwischen komplexen Größen, die völlig analog dem** Ohm**schen Gesetz** $I = (1/R)U$ **ist** auffassen, wobei an die Stelle des Ohmschen Widerstandes R der sog. **Scheinwiderstand** (komplexer Widerstand, **Impedanz**) der Kapazität, $\hat{Z} = 1/(i\omega C) = -i/(\omega C)$, tritt. Als komplexe Zahl stellt die Impedanz grundsätzlich ein Paar reeller Zahlen dar und kann die Information über den Proportionalitätsfaktor zwischen den Scheitelwerten von Strom und Spannung (Wechselstromwiderstand) wie auch über die Phasenbeziehung aufnehmen. Der Vorteil der komplexen Rechnung liegt darin, dass die Phasenkonstante in den **multiplikativen** Faktor $\hat{Z}$ eingeschlossen ist und nicht mehr explizit gehandhabt zu werden braucht, was wegen der Additionstheoreme für sin und cos die Berechnung selbst einfacher Schaltkreise im Reellen außerordentlich umständlich machen würde.

Üblicherweise dividiert man beide Seiten der Gleichung $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$ durch $e^{i\omega t}$, da dieser Faktor lediglich die gleichmäßige Rotation der Vektoren $\hat{U}$ und $\hat{I}$ in der Gaussschen Zahlenebene beschreibt. Wir werden unter $\hat{U}$ und $\hat{I}$ im folgenden also feste Vektoren verstehen, von denen wir einen (z.B. die treibende Spannung einer Schaltung) reell annehmen können.

Ganz analoge Betrachtungen wie bei der Kapazität liefern die Impedanzen der Induktivität und des Ohmschen Widerstandes. Wir erhalten:

$$\hat{Z}_R = R \qquad \text{für den Ohmschen Widerstand,}$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad \text{für die Kapazität,}$$

$$\hat{Z}_L = i\omega L \qquad \text{für die Induktivität.}$$

und als komplexe Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}.$$

$\hat{Z}$ wird als Scheinwiderstand oder Impedanz, sein Realteil als **Wirkwiderstand**, sein Imaginärteil als **Blindwiderstand** bezeichnet. Der Betrag $|\hat{Z}| = Z$ heißt Wechselstromwiderstand.

Weil diese Beziehung formal dem Ohmschen Gesetz gleicht und weil die Kirchhoffschen Gesetze auch für Wechselströme und -spannungen gelten, erhalten wir für die Reihen- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen dieselben Regeln wie für entsprechende Kombinationen Ohmscher Widerstände:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{\text{ges}} &= \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 && \text{für Reihenschaltungen,} \\ \frac{1}{\hat{Z}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} && \text{für Parallelschaltungen.} \end{aligned}$$

Beliebige Netzwerke aus Impedanzen werden daher formal-rechnerisch völlig analog der entsprechenden Schaltung aus Ohmschen Widerständen behandelt. Die Zeigerdiagramme für Strom, Spannung, Impedanz oder reziproke Impedanz sind nichts anderes als grafische Darstellung der hierbei auftretenden Operationen mit komplexen Größen in der Gaussschen Zahlenebene

Natürlich ist dieser Formalismus nur eine zweckmäßige, weil vereinfachende Rechenvorschrift. Ströme und Spannungen sind reelle Funktionen, d.h. zu jedem Zeitpunkt durch Angabe jeweils einer reellen Zahl in geeigneten Einheiten messbare Größen. Wir können diese Funktionen erhalten, indem wir am Schluss der komplexen Rechnung $\hat{I}$ und $\hat{U}$ wieder mit dem Faktor $e^{i\omega t}$ multiplizieren und die Realteile dieser komplexen Zahlen bilden. Wir können stattdessen aber auch die eigentlich interessierenden Kenngrößen, nämlich Amplitude und Phase, direkt aus den komplexen Repräsentanten $\hat{I}$ bzw. $\hat{U}$ gewinnen. Setzen wir etwa in $\hat{I} = \hat{Z}\hat{U}$ die Spannung reell an (womit wir t festgelegt haben), so ist die **Amplitude** I_0 durch den **Betrag** $I_0 = |\hat{I}| = \sqrt{(Re\ \hat{I})^2 + (Im\ \hat{I})^2}$ und die **Phase** φ durch das **Argument** von $\hat{I}$, $\tan\varphi = \frac{Im\ \hat{I}}{Re\ \hat{I}}$, gegeben. (Das so berechnete φ ist der Phasenwinkel bezüglich der reellen Achse und stimmt nur dann mit der Phasenverschiebung gegen U überein, wenn U reell angesetzt wird.)

Beispiel: Rechnung beim RC-Spannungsteiler (Tiefpass, s. Abb. A4.8)

$$\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{1}{1 + iR\omega C} = \frac{1 - iR\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$U_{0,C} = \left|\hat{U}_C\right| = \left|\frac{1}{1 + iR\omega C}\right| \cdot U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-R\omega C/(1 + (\omega RC)^2)}{1/(1 + (\omega RC)^2)} = -\frac{\omega RC}{1} = -\omega RC$$

U_C eilt U um den Winkel $-\varphi$ nach:

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)).$$

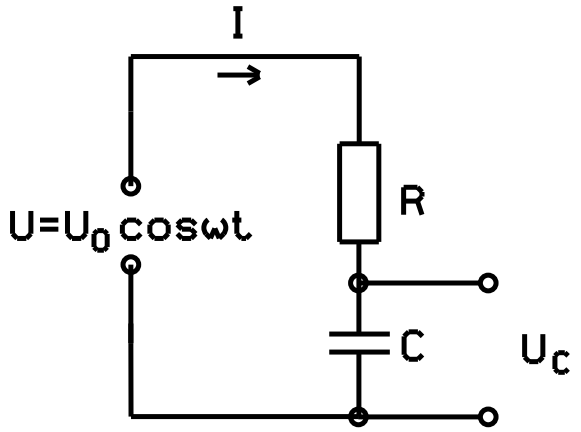


Abbildung A4.8: Frequenzabhängige Spannungsteilung.

A4.4.2 Leistung in komplexer Schreibweise

Die komplexe Behandlung führt zu Schwierigkeiten bei der Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis, weil hierzu quadratische Größen der Repräsentanten gebildet werden. Man muss deshalb vor der Leistungsberechnung zu reellen Größen übergehen oder aber besondere Festsetzungen treffen.

Bezeichnen wir mit $\hat{I}^*$ den zu $\hat{I} = \hat{U}/(|\hat{Z}|e^{i\varphi}) = I_0 e^{-i\varphi}$ komplex konjugierten Strom $\hat{I}^* = I_0 e^{+i\varphi}$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}^* = \frac{U_0 I_0}{2} e^{i\varphi} &= \frac{U_0 I_0}{2}\cos(\varphi) + i\frac{U_0 I_0}{2}\sin(\varphi) \\ &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\cos(\varphi) + iU_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Hierin sind $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ die **Effektivwerte** von Spannung und Strom (diese Werte werden üblicherweise von Wechselstrom-Messinstrumenten angezeigt). Mithin ist

$$\frac{1}{2}Re(\hat{U}\hat{I}^*) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\cos(\varphi),$$

d.h. gleich der mittleren Wirkleistung

$$\overline{N_{\text{w}}} = \overline{U_0\cos(\omega t) I_0\cos(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2}U_0 I_0\cos(\varphi).$$

Die mittlere Wirkleistung berechnet man also in komplexer Schreibweise nach der Vorschrift:

$$\overline{N_{\text{w}}} = \frac{1}{2}Re(\hat{U}\hat{I}^*).$$

Raumplan

Nr.	Bezeichung	Raum	Tel.
102/N02	Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung	AVZ	3715
104/106/N06	Trägheitsmoment, physisches Pendel	AVZ	3715
108/N08	Elastizitätskonstanten, Biegung und Knickung	0.004	2799
110	Spezifische Wärmekapazität	0.011	2794
114/N14	Statistische Schwankungen	0.012	2795
232/N32	Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände	U1.012	2789
234	Wechselstromwiderstände, RC-Glieder und Schwingkreis	U1.009	4774
236	Galvanometer	0.011	2794
238	Transformator	0.010	4769
240	Magnetisierung von Eisen	0.012	2795
242/N42	Kraftwirkung auf Ladungen (Fadenstrahlrohr)	U1.005	4776
		U1.006	4791
242	Kraftwirkung auf Ladungen (Millikan-Versuch)	U1.003	4777
		U1.004	4765
362/N62	Linsen und Linsensysteme	AVZ	3715
364	Fernrohr und Mikroskop	AVZ	3715
366/N66	Prismen-Spektralapparat	U1.003	4777
		U1.004	4765
368	Beugung und Interferenz	U1.007	3559
		U1.008	4775
370	Polarisation von Licht	U1.009	4774
372	Wärmestrahlung	U1.012	2789

Die Versuche stehen im Wolfgang-Paul-Hörsaal-Gebäude, Kreuzbergweg 28 (Raumnummern angegeben) oder im AVZ I, Endenicher Allee 11, im Erdgeschoss links.